Andreas Ullrich Schmidt

Algebraische und konforme Quantenfeldtheorie

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Diese Arbeit zerfällt in zwei wesentliche Teile. Der erste behandelt in Kap. I–III die Grundlagen und wichtigsten Ergebnisse der *algebraischen Quantenfeldtheorie*.

Diese in der späten fünfziger Jahren hauptsächlich von Rudolf Haag, D. Kastler und Huzihiro Araki formulierte Theorie unterscheidet sich wesentlich von Wightmans klassischer axiomatischer Quantenfeldtheorie. Die Grundbausteine der Wightman-Theorie sind unobservable „lokale" Felder (z.B. „geladene" Felder, Fermi-Dirac-Felder etc.). Solche Größen, die prinzipiell nicht beobachtbar sind müssen bei raumartigen Abständen nicht kommutieren. Sie kodieren also nicht die notwendig *kausale* Struktur der Theorie, d.h. die von der speziellen Relativitätstheorie geforderte Unabhängigkeit von räumlich entfernten Ereignissen. Haags Ansatz, der aus den Erkenntnissen hervorging, die er aus der von ihm entworfenen *Streutheorie* gewonnen hatte (dargestellt in [Haa92]), war es hingegen, manifest *lokale* Objekte zur Formulierung des Gehalts einer Quantenfeldtheorie zu verwenden. So wurde das *lokale Netz der Observablenalgebren* — von Neumann Algebren *beschränkter* Operatoren auf dem *Vakuumhilbertraum* — eingeführt.

Die ersten zwei Kapitel folgen dem Zyklus von Arbeiten [DHR69a], [DHR69b], [DHR71] und [DHR74], in denen Rudolf Haag, Sergio Doplicher und John E. Roberts die algebraische Quantenfeldtheorie (kurz AQFT) generisch entwickeln.

Kapitel I stellt — basierend auf [DHR69a] — die axiomatischen Grundlagen der algebraischen QFT dar und erläutert die prinzipielle physikalische Struktur, die aus diesen folgt. Zentrale Begriffe sind *inäquivalente Darstellungen der Observablenalgebra*, *superselection-Sektoren* und *Morphismen der Observablenalgebra*.

Im zweiten Kapitel wird die Theorie auf die wichtigsten Konsequenzen hin untersucht, vor allem im Hinblick auf die Formulierung von Teilchenstatistik (*Permutationsgruppenstatistik*) im algebraischen Rahmen. Hier folgen wir [DHR69b], [DHR71] und [DHR74] und auch neueren Betrachtungen.

In Kapitel III wird schließlich die wichtigste Verallgemeinerung der Ergebnisse von Kapitel I und II betrachtet: Eine AQFT auf einem niederdimensionalen Minkowskiraum (hier insbesondere in $1+1$ Dimensionen) zeigt *Zopfgruppenstatistik*. Die mathematische Struktur einer Theorie mit Zopfgruppenstatistik wird im folgenden detailliert untersucht. Dies bildet die Grundlage des zweiten Hauptteils der Arbeit:

Diesen bildet das vierte Kapitel. Es geht hier um eine interessante Anwendung des algebraischen Formalismus aus neuerer Zeit, nämlich um *konform kovariante* AQFT's. Als Paradigma wird eine Theorie auf dem *kompaktifizierten konformen Lichtkegel*, d.h. dem Einheitskreis konstruiert, wobei auch die Probleme des Übergangs von einer Wightman-Theorie zu einer AQFT beispielhaft angerissen werden. Neben allen üblichen Charakteristiken einer AQFT zeigen sich überraschende Besonderheiten, wie die Existenz „globaler" Observablen. Zuletzt wird eine in jüngster Zeit von H.J. Borchers und Hans-Werner Wiesbrock entwickelte Strategie vorgestellt. Zeil ist, die Raum-Zeit-Kovarianz einer AQFT aus algebraischen Strukturen zurückzugewinnen, ohne ursprünglich geometrische Annahmen über die zugrundeliegende Raumzeit gemacht zu haben. Die obengenannten Autoren haben dies für Poincarè-Kovarianz in $1+1$ Dimensionen und für konforme Kovarianz auf dem Einheitskreis durchgeführt.

Viele interessante Aspekte der algebraischen Quantenfeldtheorie konnten hier nicht betrachtet oder nur angerissen werden: An erster Stelle ist sicher die Rekonstruktion einer *eichkovarianten* QFT aus dem lokalen Netz der Observablenalgebren zu nennen. Die *Rekonstruktionstheoreme* von Majid, Doplicher/Roberts und Rehren, mit denen sich aus einer AQFT die zughörige *Eichalgebra* zurückgewinnen läßt, sowie die Konstruktion einer eichkovarianten Feldalgebra sind aber in Reinhard Härings Arbeit [Här93] ausführlich behandelt worden. Die Frage der Äquivalenz von Wightman-QFT und AQFT wird nur im vierten Kapitel exemplarisch gestreift. Zu den mathematischen Problemen, die der Übergang von operatorwertigen Distributionen zu lokalen Observablenalgebren mit sich bringt mag sich der interessierte Leser die Arbeit [BJY92] anschauen. Weiterhin fehlt eine Behandlung des *Borchers-Kriteriums*, das wohl das allgemeinste Kriterium zur Auswahl der physikalisch interessanten superselection-Sektoren einer QFT darstellt. Wie die einfache Forderung nach Positivität des Energiespektrums zur Lokalisierung der Ladungen in *raumartigen Kegeln* führt wurde von Detlev Buchholz und Klaus Fredenhagen in [BF82] untersucht — die Beschreibung der Zopfgruppenstatistik in $2+1$ Dimensionen, die bei dieser Lokalisierungsbedingung auftritt findet sich in [FG90]. Weiterhin viel zu kurz gekommen sind die von Haag im algebraischen Rahmen entwickelte Streutheorie ([DHR74]) inklusive des CPT- und des Spin-Statistik-Theorems für AQFT's (die letzten beiden Themen werden aber für konforme Theorien in Kapitel IV behandelt). Schließlich fanden weder die Zusammenhänge zwischen Zopfgruppenstatistik und dem Index von Inklusionen von von Neumann Algebren ([Lon89b], [Lon90]) noch die Konstruktion von Invarianten von 2- und 3-Mannigfaltigkeiten aus *DHR-Endomorphismen*, wie etwa von *Turaev-Viro-Invarianten* Eingang in diese Arbeit (siehe hierzu [FRS92], Anhang B. Wir betrachten in §17 nur den einfachsten Fall einer *Verkettungsinvariante*).

Ich danke allen, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere natürlich Prof. Dr. F. Constantinescu für seine geduldige Unterstützung sowie Wolfram Boenkost, Reinhard Häring und Henrik Kratz für die vielen anregenden Diskussionen.

Frankfurt am Main, den 21. Februar 1994

Vorwort zur Buchausgabe

Seit der Fertigstellung dieser Arbeit als Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik der Universität Frankfurt am Main sind beinahe 3 Jahre vergangen. Dies ließ eine gründliche Überarbeitung der Buchausgabe geboten erscheinen. Neben der Korrektur von Druckfehlern wurde das Literaturverzeichnis aktualisiert und ergänzt. Bibliographischen Notizen zu neueren Entwicklungen ist ein eigener Anhang mit gewidmet. Er soll dem interessierten Leser als Leitfaden in die aktuelle Literatur dienen.

Ich danke dem Logos Verlag, Berlin und insbesondere Herrn Thorsten Poeschel für ihre Unterstützung und die Anregung zu diesem Buch.

Frankfurt am Main, den 5. August 1999

KAPITEL I
Observablenalgebra und Feldalgebra

Überblick

Die grundsätzlichen Lehren, die Rudolf Haag aus seinen Untersuchungen zur Streutheorie im Rahmen der Wightman-Quantenfeldtheorie gezogen hatte waren

1. die Relevanz inäquivalenter Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen,

2. die Eindeutigkeit des Vakuumvektor-Strahls in einem Hilbertraum und

3. die Eindeutigkeit der Hilbertraumdarstellung der Poincarégruppe , sei es für freie oder für wechselwirkende Felder.

Es erschien nun natürlich, eine Quantenfeldtheorie auf Netzen von von Neumann Algebren zu begründen — lokale Feld- bzw. Observablenalgebren — und die obigen Erkenntnisse in klug gewählten Voraussetzungen zu fassen.

In diesem, ersten Kapitel starten wir von einem vorab gegebenen Netz von *Feldalgebren* und einer auf diesen wirkenden *Eichgruppe*. In §1 wird diese Axiomatik entwickelt. Aus den Feldern kann man die Observablen als eichinvariante Untermenge gewinnen, was in §2 durchgeführt wird — dies ist das Komplement der im Vorwort erwähnten Rekonstruktionstheoreme, die es erlauben, bei gegebener Observablenalgebra die Eichgruppe (besser gesagt eine verallgemeinerte Eichalgebra) und eine eichkovariante Feldalgebra zurückzugewinnen.

In §3 wird dann die grundlegende physikalische Struktur einer AQFT enthüllt: Der physikalische Hilbertraum $\mathfrak{H}$ ist unterteilt in *superselection-Sektoren*, auf denen die verschiedenen inäquivalenten Darstellungen der Observablenalgebra wirken.

Die Philosophie der AQFT ist aber im Grunde die umgekehrte: Als generische Objekte sind ausschließlich die Observablen anzusehen, denn nur sie erfüllen die Forderung nach Kausalität, das heißt hier, daß raumartig zueinander lokalisierte Observablen als Operatoren auf dem Vakuumhilbertraum kommutieren. In §4 wird die auf dem lokalen Observablennetz basierende AQFT vorbereitet. Wesentlich dafür ist ein Kriterium, das es erlaubt aus der Unzahl möglicher Darstellungen der Observablenalgebra $\mathfrak{A}$ die physikalisch interessanten Sektoren auszuwählen. Wir verwenden das klassische *DHR-Kriterium*, das nicht das allgemeinste sinnvolle ist, aber ausreicht um Streutheorien massiver Teilchen zu konstruieren und sowieso um die Prinzipien der Theorie zu verdeutlichen. Weiterhin wird dann noch die für alles folgende eminent wichtige Eigenschaft der *Haag-Dualität im Vakuumsektor* eingeführt.

§5 beschreibt, wie sich im Prinzip die superselection-Struktur durch *lokalisierte Morphismen* der Observablenalgebra darstellen läßt. Eine Darstellung aus einem Sektor $[\pi]$ wird realisiert auf dem Vakuumhilbertraum $\mathfrak{H}_0$ durch $\pi_0 \circ \rho$, wobei ρ ein lokalisierter Endomorphismus von $\mathfrak{A}$ ist. Die so gebildete Darstellung erfüllt dann das DHR-Kriterium. Ist die

Vakuumdarstellung π_0 treu, so kann man sie und den Vakuumhilbertraum $\mathfrak{H}_0$ zunächst vergessen und sich auf die Untersuchung der Morphismen konzentrieren, wie das dann in den folgenden Kapiteln getan wird. Dazu bildet §5 die Grundlage.

§1 DHR–Axiomatik

Die folgenden Voraussetzungen für die Feldalgebra werden später zum Teil unverändert für die Observablenalgebra benötigt, wobei der Hilbertraum $\mathfrak{H}$ der Theorie durch den Vakuumhilbertraum $\mathfrak{H}_0$ ersetzt wird. Die Axiome werden also, soweit sie für beide Sorten von Algebren gelten, auch für beide formuliert, der Teil, der sich auf die Observablenalgebren bezieht aber in Klammern gesetzt. Bei der Konstruktion der Observablenalgebra aus der Feldalgebra werden natürlich nur die Axiome für die Feldalgebra benutzt.

Um eine lokale Quantentheorie zu konstruieren, muß man zunächst die Algebren lokal definieren:

$\boxed{I}$ **(Lokale Algebren und Hilbertraum)** *Es existiert eine eindeutige Zuordnung*

$$\mathcal{O} \longmapsto \mathfrak{F}(\mathcal{O}), \quad (\mathcal{O} \longmapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O})), \tag{1.1}$$

die jeder offenen, endlich ausgedehnten Untermenge der Raumzeit die zugehörige lokale Feldalgebra (Observablenalgebra) zuordnet. Es reicht aus, die Menge der Gebiete $\mathcal{O}$ auf die Menge $\mathcal{K}$ der unten definierten Doppelkegel zu beschränken. Die Operatoren aus $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$, $(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))$ sind Operatoren auf dem Hilbertraum der Theorie $\mathfrak{H}$, $(\mathfrak{H}_0)$:

$$\mathfrak{F}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \quad (\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)), \tag{1.2}$$

(wobei $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ die Menge der beschränkten Operatoren auf $\mathfrak{H}$ bezeichnet). Die lokalen Feldalgebren (und Observablenalgebren) $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$, $(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))$ sind von Neumann Algebren, d.h.

$$\mathfrak{F}(\mathcal{O})'' = \mathfrak{F}(\mathcal{O}), \quad (\mathfrak{A}(\mathcal{O})'' = \mathfrak{A}(\mathcal{O})), \tag{1.3}$$

wobei $\mathfrak{F}(\mathcal{O})'$, $(\mathfrak{A}(\mathcal{O})')$ den Kommutanten in $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $(\mathcal{B}(\mathfrak{H}_0))$ bezeichnet (siehe Def. A.9). die lokalen Algebren besitzen eine gemeinsame Identität $\mathbb{1}$.

Definition 1.1 *Seien V_+, V_- der offene Vorwärts– bzw. Rückwärtslichtkegel des betrachteten Minkowskiraumes $\mathcal{M}$. Seien $x,\ y \in \mathcal{M}$ mit $y - x \in V_+$. Dann heißt die Menge*

$$\mathcal{O} \equiv V_+ + x \,\cap\, V_- + y$$

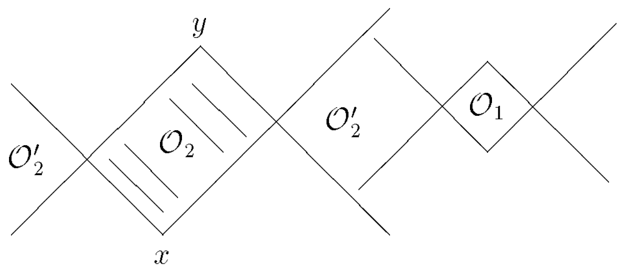
(offener) Doppelkegel. *Die Menge aller Doppelkegel wird mit $\mathcal{K}$ bezeichnet. Das* **raumartige** *bzw.* **kausale Komplement** *eines Doppelkegels $\mathcal{O}$ wird mit $\mathcal{O}'$ bezeichnet* [1]*:*

$$\mathcal{O}' \equiv \{x \in \mathcal{M} \mid \forall y \in \mathcal{O} : x - y \notin V_+ \cup V_-\}.$$

Zwei Doppelkegel $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ heißen **raumartig zueinander gelegen**, *in Zeichen $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ wenn $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2'$.*

Diese Definition stellt sich im zweidimensionalen Fall so dar:

[1] $\mathcal{O}'$ ist kanonisch abgeschlossen, d.h. $\mathcal{O}' = \overline{\mathcal{O}'^\circ}$ wohingegen $\mathcal{O}$ kanonisch offen ist, d.h. $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}^\circ$, wobei $\overline{\mathcal{N}}$ die abgeschlossene Hülle und $\mathcal{N}^\circ$ die Menge aller inneren Punkte von $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ bezeichnet.



Warum gerade Doppelkegel als Lokalisierungsgebiete bevorzugt werden, bedarf einer Motivation.

Zunächst stellt man sich vor, daß ein vernünftiges „Gebiet“ einen wohldefinierten kausalen Anfangs- und Endpunkt haben soll. Seien x und y diese Punkte. Dann überlegt man sich leicht, daß der durch (x,y) bestimmte Doppelkegel gerade die Menge aller Punkte ist, die Wirkungen von x empfangen *und dann* auf y kausal einwirken können.

Man könnte also — etwas unscharf — sagen, daß der Doppelkegel zu (x,y) gerade einen physikalischen Vorgang einfängt, der sich „von x nach y erstreckt“.

Diese Überlegungen werden durch folgende Begriffsbildung gestützt:

Definition 1.2 *Sei $\mathcal{O}$ eine beliebige Untermenge des Minkowskiraumes $\mathcal{M}$. $\mathcal{O}$ heißt* **kausal vollständig** *wenn $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}$ gilt. $\mathcal{O}''$ heißt* **kausale Vervollständigung** *von $\mathcal{O}$.*

Doppelkegel sind nun gerade die Prototypen kausal vollständiger Gebiete, denn offenbar ist für den durch (x,y) bestimmten Doppelkegel $\mathcal{O}$ gerade $\mathcal{O} = (\{x\} \cup \{y\})''$. Durch die Wahl der Doppelkegel als Lokalisierungsgebiete in Axiom I erreicht man auf triviale Weise also, daß durch kausale Vervollständigung eines Lokalisierungsgebietes die zugehörige Algebra nicht verändert wird:

$$\mathfrak{F}(\mathcal{O}) = \mathfrak{F}(\mathcal{O}''), \ (\mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}(\mathcal{O}'')). \tag{1.4}$$

Noch einige Bezeichnungen: $\mathcal{O}_1 \wedge \mathcal{O}_2$ bezeichnet das größte in $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ enthaltene kausal abgeschlossene Gebiet (für Doppelkegel ist $\mathcal{O}_1 \wedge \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$); $\mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2$ bezeichnet das kleinste kausal abgeschlossenen Gebiet, das $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ enthält (es ist $\mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)''$).

Definition 1.3 *die Menge aller Lokalen Algebren zu $\mathcal{O}$ aus $\mathcal{K}$ heißt* **(lokales) Netz** *und wird mit $\mathfrak{F}_\mathcal{K}$, $(\mathfrak{A}_\mathcal{K})$ bezeichnet,*

$$\mathfrak{F}_\mathcal{K} \equiv \{\mathfrak{F}(\mathcal{O}) | \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}, \quad (\mathfrak{A} \equiv \{\mathfrak{A}(\mathcal{O}) | \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}.$$

(In diesem Zusammenhang nennt man die $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ auch **Netzindex***). Die* **Komplementsalgebra** *eines Gebietes $\mathcal{O}$ ist die von allen $\mathfrak{F}(\mathcal{O}_1)$, $(\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1))$ mit $\mathcal{O}_1 \between \mathcal{O}$ erzeugte Algebra, in Zeichen*

$$\mathfrak{F}(\mathcal{O}') \equiv \bigvee_{\substack{\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K} \\ \mathcal{O}_1 \between \mathcal{O}}} \mathfrak{F}(\mathcal{O}_1), \quad \Big(\mathfrak{A}(\mathcal{O}') \equiv \bigvee_{\substack{\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K} \\ \mathcal{O}_1 \between \mathcal{O}}} \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)\Big). \tag{1.5}$$

Eine grundsätzliche Vorstellung über die Struktur des Raumes spiegelt sich in der Forderung nach Isotonie wieder. Grob gesprochen bedeutet sie, daß ein größeres Raumgebiet auch mehr physikalische Information enthält.

$\boxed{II}$ **(Isotonie)** *Aus $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ folgt $\mathfrak{F}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{F}(\mathcal{O}_2)$, $(\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2))$.*

Die Netzindexmenge $\mathcal{K}$ ist nun **gerichtet** in dem Sinne, daß jede endliche Untermenge $\{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k\}$ eine obere Schranke $\mathcal{O}$ mit $\mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, k$ besitzt. Daraus und aus der Isotonie folgt unmittelbar, daß die lokalen Netze $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}$, $\mathfrak{A}_{\mathcal{K}}$ die Eigenschaft besitzen, daß eine aufsteigende Folge von Indizes $(\mathcal{O}_n) \subset \mathcal{K}$ existiert (d.h. $\mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}_j$ für $i < j$), so daß jedes $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ für hinreichend großes k in $\mathcal{O}_k$ enthalten ist. Ein Netz von von Neumann Algebren mit dieser Eigenschaft heißt **gerichtetes Netz**. Unter diesen Umständen wird die Vereinigung aller lokalen Algebren wieder eine *-Algebra sein:

$$\mathfrak{F}^\circ \equiv \bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}} \mathfrak{F}(\mathcal{O}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}(\mathcal{O}_k)\,.$$

Diese Vereinigung erbt von den lokalen Algebren eine eindeutig bestimmte Norm und ihr Abschluß in dieser Norm wird eine C^*-Algebra. Das motiviert folgende Definition:

Definition 1.4 *Die auf die oben geschilderte Weise gebildete* **Gesamtalgebra** *wird mit* $\mathfrak{F}$, $(\mathfrak{A})$ *bezeichnet:*

$$\mathfrak{F} \equiv C^*(\mathfrak{F}^\circ) = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}} \mathfrak{F}(\mathcal{O})}\,, \quad \left(\mathfrak{A} \equiv C^*(\mathfrak{A}^\circ) = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})}\right)\,. \tag{1.6}$$

Die Gesamtalgebren werden auch als **quasilokale Algebren** *bezeichnet.*

Genaueres über Netze von Algebren findet man in [BW92], Kap. 5.

Ist man damit einverstanden, daß die gesamten physikalische Information über ein System in der Observablenalgebra enthalten ist, so muß man verstehen, daß sowohl die Feldalgebra, wie auch der Hilbertraum Hilfskonstruktionen sind. Insbesondere stellt man sich den Hilbertraum als Hilbertraum der GNS-Konstruktion über einem Zustand ω_0 der Observablenalgebra vor. Dieser Zustand heißt **Vakuumzustand**. Die GNS-Konstruktion kann dann von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{F}$, d.h. vom Vakuumhilbertraum $\mathfrak{H}_0$ auf den Gesamthilbertraum $\mathfrak{H}$ ausgedehnt werden. Axiomatisch gefaßt:

$\boxed{III}$ **(Hilbertraum und Vakuumdarstellung)** $\mathfrak{F}$, $(\mathfrak{A})$ *ist treu und irreduzibel dargestellt auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$, $(\mathfrak{H}_0)$, *d.h.*

$$\mathfrak{F}^- = \mathfrak{F}'' = \mathcal{B}(\mathfrak{H})\,, \quad (\mathfrak{A}^- = \mathfrak{A}'' = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0))\,. \tag{1.7}$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{F}^-$, $(\mathfrak{A}^-)$ *den schwachen Abschluß (siehe Anhang A) der Feldalgebra (Observablenalgebra). Die treue Darstellung von* $\mathfrak{F}$ *auf* $\mathfrak{H}$ *und von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{H}_0$ *heißt* **Vakuumdarstellung** *und wird mit* π_0 *bezeichnet. Es existiert jeweils genau ein zyklischer Vektor* **(Vakuumvektor)** Ω *für* π_0 *in* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{H}_0$.

Die Irreduzibilität $\mathfrak{F}'' = \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ ist gleichbedeutend mit $\mathfrak{F}' = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$. Das heißt, es gilt

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}' \cap \mathfrak{F} = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}\,, \quad (\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A} = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1})\,. \tag{1.8}$$

$\mathfrak{F}$ ist also ein *Faktor* (im Sinne von Def.A.12) in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$ einer in $\mathfrak{H}_0$.

Natürlich wird $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}_0$ gelten — deshalb kann man auch für die Darstellungen auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_0$ und die Vakuumvektoren die gleichen Bezeichnungen wählen — aber wir wollen die Axiome für die beiden Sorten von Algebren möglichst unabhängig formulieren.

Häufig werden die Operatoren aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{A}$ mit ihren Vakuumdarstellungen identifiziert und π_0 wird der Einfachheit halber gelegentlich weggelassen (wie schon in (1.7)). Man nennt π_0 auch **definierende Darstellung** von $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{A}$.

Das nächste Axiom beschreibt die Poincaré-Kovarianz der Theorie, also die Symmetrie des zugrundeliegenden Minkowskiraumes.

$\boxed{IV}$ **(Poincaré-Kovarianz)** *Es existiert eine treue, stark stetige, unitäre Darstellung der Poincarégruppe $\mathcal{P}$ auf $\mathfrak{H}$, $(\mathfrak{H}_0)$:*

$$\mathcal{P} \ni L \mapsto U(L) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) , \quad (\mathcal{P} \ni L \mapsto U_0(L) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)) . \tag{1.9}$$

*Diese Darstellung induziert *-Automorphismen (vgl. (5.1)) von $\mathfrak{F}$, $(\mathfrak{A})$, bezeichnet durch α_L:*

$$L \in \mathcal{P} , \ F \in \mathfrak{F} : \quad \alpha_L(F) \equiv U(L) F U(L)^{-1} , \tag{1.10i}$$

(bzw.

$$L \in \mathcal{P} , \ A \in \mathfrak{A} : \quad \alpha_L(A) \equiv U_0(L) A U_0(L)^{-1}) . \tag{1.10ii}$$

Diese Automorphismen transformieren jede lokale Algebra $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$, $(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))$ in die lokale Algebra des transformierten Doppelkegels $\mathfrak{F}(L\mathcal{O})$, $(\mathfrak{A}(L\mathcal{O}))$[2]*.*

$\boxed{V}$ **(Spektrumsbedingung)** *Die Generatoren der Raum-Zeit-Translationen $P_0 = E$, P_1 , P_2 ,P_3 werden* Energie-Impuls-Operatoren *genannt. Der Vakuumvektor Ω ist der eindeutig bestimmte Eigenvektor von $P_0 = E$ zum Eigenwert 0. Das Spektrum von $P = (E , P_1 , \ P_2 , P_3)$ liegt ganz im Vorwärtslichtkegel V_+. Insbesondere gilt* $\mathrm{sp}(E) \subset \mathbb{R}_0^+$. *Man sagt auch, die Vakkuumdarstellung habe* **positives Energiespüektrum**.

Borchers konnte zeigen [Bor66], daß unter diesen beiden Voraussetzungen die Operatoren $U(x)$, die Translations–Automorphismen α_x induzieren, immer aus dem schwachen Abschluß $\mathfrak{A}^-$ der Observablenalgebra gewählt werden können. Dies gilt nicht nur für die Vakuumdarstellung, sondern für jede Darstellung π von $\mathfrak{A}$, in der Poincaré-Kovarianz und Spektrumsbedingung gelten: Dann ist immer

$$U(x) \in \pi(\mathfrak{A})^- . \tag{1.11}$$

Diese Wahl der Translationsoperatoren ist auch die natürliche, denn dann kann der Generator P als globale Observable, die Energie und Impuls mißt, interpretiert werden. Wir werden später sogar eine Verallgemeinerung dieser Aussage beweisen können (vgl. Satz 11.9ii)).

Der zweitwichtigste Bestandteil der Theorie nach der Feld- bzw. Observablenalgebra ist die Eichgruppe. Sie ist, wie wir sehen werden, die Gruppe der Transformationen von $\mathfrak{F}$, die gerade die Redundanz, die in der Beschreibung der Physik durch Felder anstatt ausschließlich durch Observablen steckt, beschreibt.

$\boxed{VI}$ **(Eichgruppe)** *Es existiert eine kompakte Eichgruppe $\mathcal{G}$ und eine treue, stark stetige, unitäre Darstellung*

$$\mathcal{G} \ni g \mapsto U(g) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) . \tag{1.12}$$

[2] Das Transformierte eines Doppelkegels ist natürlich wieder ein Doppelkegel weil der Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel bis auf Translationen Poincaré-invariant sind.

*Diese Darstellung Induziert eine Gruppe von *-Automorphismen von $\mathfrak{F}$, bezeichnet durch α_g:*

$$g \in \mathcal{G}\,,\ F \in \mathfrak{F}:\quad \alpha_g(F) \equiv U(g) F U(g)^{-1}\,. \tag{1.13}$$

Die Darstellungen von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ kommutieren, d.h. $U(\mathcal{P}) \subset U(\mathcal{G})'$. Die Automorphismen α_g wirken **streng lokal** *auf $\mathfrak{F}$, d.h. $\alpha_g(\mathfrak{F}(\mathcal{O})) = \mathfrak{F}(\mathcal{O})$, $\forall g \in \mathcal{G}$. Das Vakuum ist eichinvariant: $U(\mathcal{G})\Omega = \Omega$.*

Daß vorangegangene Axiom legt nahe, die maximale Gruppe von Operatoren zu betrachten, die mit den Forderungen für die Eichgruppe verträglich ist. Dabei werden die topologischen Voraussetzungen die für $\mathcal{G}$ galten (Kompaktheit, starke Stetigkeit der Darstellung) zunächst fallengelassen.

Definition 1.5 *Die* **maximale Eichgruppe** $\mathcal{G}_{\max}$ *ist definiert als die größte Menge von Operatoren U auf $\mathfrak{H}$, die*

$$\begin{aligned} UU(L) &= U(L)U\,, \quad \forall L \in \mathcal{P}\,,\\ U\mathfrak{F}(\mathcal{O})U^{-1} &= \mathfrak{F}(\mathcal{O})\,, \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K}\,,\\ U\Omega &= \Omega\,, \end{aligned} \tag{1.14}$$

erfüllen, versehen mit der starken Operatortopologie.

In [DHR69a] wird gezeigt, daß $\mathcal{G}_{\max}$ unter einigen physikalischen Voraussetzungen kompakt ist (s.u.).

Daß die Darstellung der Eichgruppe nur auf $\mathfrak{F}$ definiert wird, hat einen guten Grund. Sie dient nun nämlich dazu, die Observablenalgebra $\mathfrak{A}$ zu definieren. Wir beenden damit die Aufzählung allgemeiner Axiome, und folgen [DHR69a] in der Konstruktion der Observablenalgebra.

§2 Konstruktion der Observablenalgebra

Wir gehen von der nun naheliegenden Definition der Observablen aus:

Definition 2.1 *Die* **Observablenalgebra** *eines Doppelkegels $\mathcal{O}$ ist definiert durch*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \equiv \mathfrak{F}(\mathcal{O}) \cap U(\mathcal{G})'\,, \tag{2.1}$$

also als die eichinvariante Untermenge von $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$.

Da nun die Observablenalgebra als Untermenge der Feldalgebra eingeführt ist, muß noch *die* neben der Eichinvarianz charakteristische Forderung an sie gestellt werden. Dies ist in unserem Kontext natürlich zunächst eine Forderung an die lokalen Feldalgebren.

$\boxed{VII}$ **(Kausalität)** *Raumartig zueinander gelegene lokale Observablenalgebren kommutieren, d.h.*

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \Longrightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)'\,. \tag{2.2}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, Def.2.1 auf der Ebene der Operatoren zu verwirklichen. Die naheliegendste Idee ist, die Wirkung der Eichgruppe auf den Feldern auszumitteln, d.h. auszuintegrieren. Das geht aber nur, wenn die Eichgruppe kompakt ist, damit ein normiertes Haarsches Maß auf ihr existiert, über das integriert werden kann. Die Argumente, die dieses Ergebnis stützen, seien hier nur kurz skizziert.

In [DHR69a] argumentieren Doplicher, Haag und Roberts, daß $\mathcal{G}_{\max}$ kompakt in der starken Topologie von $\mathfrak{H}$ sein muß, wenn die Theorie eine *vollständige Teilcheninterpretation* besitzt. Sie betrachten zunächst den Unterraum $\mathfrak{H}^{(1)}$ von $\mathfrak{H}$, der von **Einteilchenzuständen** gebildet wird und reduzieren diesen Unterraum bezüglich der Einschränkung $U^{(1)}$ der Darstellung der Poincarégruppe auf $\mathfrak{H}^{(1)}$ aus:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^{(1)} &= \bigoplus_i (\mathfrak{H}_i \otimes \mathfrak{H}_i')\,, \\ U^{(1)}(L) &= \bigoplus_i (U_{[m_i\,,s_i]}(L) \otimes \mathbb{1}_i')\,, \quad \forall L \in \mathcal{P}\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dies ist eine Faktorzerlegung, wie sie uns weiter unten bei der Zerlegung von π_0 auf $\mathfrak{H}$ in Sektoren wiederbegegnen wird. Die Dimension der Räume $\mathfrak{H}_i'$ gibt dabei an, mit welcher Vielfachheit die Darstellungen $U_{[m_i\,,s_i]}$ zu bestimmter Masse und Spin der Poincarégruppe auftreten. Physikalisch heißt das, daß durch $\mathfrak{H}_i'$ die verschiedenen Teilchen eines Massen- und Spin-Multipletts unterschieden werden können (durch Wahl einer geeigneten Basis in $\mathfrak{H}_i'$).

Nun wird weiter angenommen, daß der Formalismus der Streutheorie, der für Bose- und Fermifelder entwickelt wurde, angewandt werden kann. Es sollen also in $\mathfrak{F}$ spezielle Operatoren $B_{i\,,\lambda}$ existieren (λ ist der Multiplettindex), aus denen im folgenden ein vollständiger Satz von in-states konstruiert werden soll:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_i \otimes \mathfrak{H}_i' \ni \phi_{i\,,\lambda} &\equiv B_{i\,,\lambda}\Omega \\ B_{i\,,\lambda}^{f_i}(t) &\equiv \int_{x^0=t} f_i(x)\alpha_x(B_{i\,,\lambda})\,\mathrm{d}^3x\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei die Funktionen f_i Fourier-Transformierte von Funktionen mit kompaktem Träger in der Massenschale zur Masse m_i sind. Die $B_{i\,,\lambda}$ werden dabei aus einer Untermenge $\mathfrak{F}_\infty \subset \mathfrak{F}$ gewählt, die hier nicht näher spezifiziert werden muß. Die $\phi_{i\,,\lambda}$ — und ihre Bilder unter räumlichen Translationen (d.h. Zustände die durch $\alpha_x(B_{i\,,\lambda})$ entstehen) — sollen den ganzen Einteilchenzustandsraum $\mathfrak{H}^{(1)}$ aufspannen. Mehrteilchen-in-states sollen sich dann ausdrücken lassen in der Form

$$\Phi \equiv (\phi_1 \times \ldots \times \phi_n)^{\mathrm{in}} \equiv \lim_{t\to-\infty} B^{f_1}(t) \ldots B^{f_n}(t)\,\Omega\,. \tag{2.5}$$

Bisher wurden nur mehr oder minder technische Voraussetzungen gemacht. Nun folgen die wichtigeren:

1. (2.5) soll als Norm-Limes existieren und nur von den Einteilchenzuständen

   $$\phi_i \equiv B^{f_i}(t)\Omega$$

   abhängen.

2. Die Abbildung
$$\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_n \longmapsto (\phi_1 \times \ldots \phi_n)^{\text{in}}, \tag{2.6}$$
soll eine Norm-stetige lineare Abbildung von $\mathfrak{H}^{(1)}$ nach $\mathfrak{H}$ sein.

Diese Annahmen sind Standards der Streutheorie; weiter gelte:

3. Die Mehrteilchen-in-states sollen einen vollständigen Satz bilden, d.h. die lineare Hülle des Bildes von $\mathfrak{H}^{(1)}$ unter der Abbildung (2.6) liege dicht in $\mathfrak{H}$.
4. Jedes Multiplett von Teilchen habe nur endlich viele Mitglieder, d.h. die $\mathfrak{H}'_i$ seien endlichdimensional.

Betrachten wir nun die Menge $\mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ von unitären Operatoren, die alle definierenden Eigenschaften (1.14) der maximalen Eichgruppe erfüllen, wobei allerdings $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F}_\infty$ zu ersetzen ist. Dann ist $\mathcal{G}_\infty \supset \mathcal{G}_{\max}$. Weil die Operatoren aus $\mathcal{G}_\infty$ mit den $U(L)$, $L \in \mathcal{P}$ kommutieren und weil $\mathfrak{H}^{(1)}$ von $\alpha_x(B_{i,\lambda})\Omega$ aufgespannt wird transformiert $\mathcal{G}_\infty$ $\mathfrak{H}^{(1)}$ in sich selbst, denn dann ist für $g \in \mathcal{G}_\infty$
$$\begin{aligned}\alpha_g \circ \alpha_x(B_{i,\lambda})\Omega &= U(g)U(x)B_{i,\lambda}U(x)^{-1}U(g)^{-1}\Omega = \\ &= U(x)U(g)B_{i,\lambda}U(g)^{-1}U(x)^{-1}\Omega \in \mathfrak{H}^{(1)},\end{aligned}$$
weil $U(g)B_{i,\lambda}U(g)^{-1} \in \mathfrak{F}_\infty$ ist nach (1.14).

Bezeichne $\mathcal{G}_\infty^{(1)}$ die Einschränkung von $\mathcal{G}_\infty$ auf $\mathfrak{H}^{(1)}$. Betrachtet man $\mathcal{G}_\infty^{(1)}$ und $\mathcal{G}_\infty$ als topologische Gruppen in der starken Operatortopologie auf $\mathfrak{H}$, so zeigt sich, daß sie topologisch isomorph sind. Zunächst folgt aus der Definition der in-states (2.4), (2.5), daß
$$U(\phi_1 \times \ldots \phi_n)^{\text{in}} = (U\phi_1 \times \ldots U\phi_n)^{\text{in}}. \tag{2.7}$$
Das bedeutet aber, da die in-states nach Voraussetzung einen vollständigen Satz bilden sollen, daß ein $U \in \mathcal{G}_\infty$ eindeutig durch seine Einschränkung auf $\mathcal{G}_\infty^{(1)}$ bestimmt ist, und weiter — mit der Stetigkeit der Abbildung (2.6) — die stetige eineindeutige Korrespondenz der Elemente von $\mathcal{G}_\infty^{(1)}$ mit denen von $\mathcal{G}_\infty$.

Sei weiter $\mathcal{U}(\mathfrak{H}'_i)$ die Gruppe aller unitären Operatoren auf $\mathfrak{H}'_i$. Diese Gruppe ist kompakt in der starken Operatortopologie von $\mathfrak{H}'_i$, weil dieser Raum endlichdimensional ist. Nun gilt: Die Gruppe der unitären Operatoren auf $\mathfrak{H}^{(1)}$, die mit $U(\mathcal{P})$ kommutieren (versehen mit der starken Operatortopologie), ist isomorph zu $\prod_i \mathcal{U}(\mathfrak{H}'_i)$, der topologischen Produktgruppe der $\mathcal{U}(\mathfrak{H}'_i)$. Dies folgt aus der Überlegung, daß Operatoren, die mit $U(\mathcal{P})$ kommutieren, auf den $\mathfrak{H}_i$ trivial wirken müssen, da die Poincarégruppe dort irreduzibel operiert. *Tychonoff's Theorem* über die Kompaktheit von *beliebigen* Produkten topologischer Räume besagt nun, daß diese Produktgruppe wieder kompakt ist. Offensichtlich enthält sie $\mathcal{G}_\infty^{(1)}$.

Schließlich bemerkt man, daß $\mathcal{G}_{\max}$ abgeschlossen ist, denn die Definitionsgleichungen (1.14) bleiben bei Grenzwertbildungen in der starken Ooperatortopologie erhalten.

Unter allen gemachten Voraussetzungen hat man also:

Theorem 2.2 *$\mathcal{G}_\infty$ ist isomorph zu einer Untergruppe der kompakten Gruppe $\prod_i \mathcal{U}(\mathfrak{H}'_i)$. $\mathcal{G}_{\max}$ ist eine kompakte Untergruppe von $\mathcal{G}_\infty$.*

Man beachte, wie wesentlich die Endlichkeit der Teilchenmultipletts im Beweis eingeht — ohne sie wären die $\mathcal{U}(\mathfrak{H}_i')$ gar nicht kompakt.

Nun können wir die Observablen aus den Feldern extrahieren:

Satz 2.3 *Für alle $F \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ definiert*

$$m(F) \equiv \int_{\mathcal{G}} \alpha_g(F)\, \mathrm{d}\mu(g)\,, \tag{2.8}$$

einen Operator aus $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Dabei existiert das Integral als Limes in der schwachen Operatortopologie (siehe A.4), und μ bezeichnet das normierte Haarsche Maß auf $\mathcal{G}$. Weiter gilt:

i) $\alpha_g \circ m = m \circ \alpha_g = m$ und $m \circ m = m$, d.h. m ist ein Projektor von $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ auf $U(\mathcal{G})'$.

ii) $F \geq 0 \Rightarrow m(F) \geq 0$ und $m(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, d.h. m ist eine normierte positive Abbildung.

iii) m ist σ-schwach stetig.

Beweis: Das Integral existiert da die Darstellung $g \mapsto U(g)$ der Eichgruppe stark stetig ist. i) folgt, weil jede kompakte Gruppe unimodular und deshalb das Haarsche Maß auf $\mathcal{G}$ rechts- und linksinvariant ist. $m \circ m = m$ ist eine direkte Folge der beiden anderen Aussagen. ii): Die Menge $\mathcal{B}^+$ der positiven Elemente einer konkreten C*-Algebra $\mathcal{B}$ auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ ist ein schwach-abgeschlossener konvexer Kegel: Sei A_n eine Folge mit $\langle\phi|A_n - A\phi\rangle \to 0\,,\ \forall\Phi \in \mathfrak{H}$. Daß A_n positiv ist, ist äquivalent mit $||\, ||A_n|| - A_n|| \leq ||A_n||$, oder

$$\sup_{\phi\in\mathfrak{H}}\left(\sup_{\xi\in\mathfrak{H}}\left(\frac{\langle\xi|A\xi\rangle}{||\xi||^2}\right) - \frac{\langle\phi|A\phi\rangle}{||\phi||^2}\right) \leq \sup_{\psi\in\mathfrak{H}}\left(\frac{\langle\psi|A\psi\rangle}{||\psi||^2}\right)\,.$$

Diese Relation bleibt im Grenzübergang erhalten $\Rightarrow A \in \mathcal{B}^+$, also ist B^+ schwach abgeschlossen. (Hierzu und zur Konvexität siehe [BR79], Prop.2.2.11). Daraus folgt ii), wenn man beachtet, daß μ normiert ist. Zu iii): Nach Satz A.7 ist die σ-schwache Topologie auf $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ gerade die schwache*-Topologie, die durch die Dualität von $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ zu den Spurklassenoperatoren auf $\mathfrak{H}$ induziert wird. Nun bildet m $\mathcal{T}(\mathfrak{H})$ in sich selbst ab, denn in der Tat ist $\mathrm{Tr}(m(T)) = \mathrm{Tr}(T)$ (die Spurbildung ist stetig). Weiter ist m bezüglich dieser Dualität selbstdual, denn

$$\begin{aligned}\forall A\in\mathcal{B}(\mathfrak{H}) : \quad \mathrm{Tr}(T\, m(A)) &= \mathrm{Tr}\left(\int_{\mathcal{G}} TU(g)AU(g)^{-1}\, \mathrm{d}\mu(g)\right) = \\ &= \mathrm{Tr}\left(\int_{\mathcal{G}} U(g)^{-1}TU(g)A\, \mathrm{d}\mu(g)\right) = \mathrm{Tr}(m(T)A)\,.\end{aligned}$$

Sei $(A_n) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ eine Folge, die in dieser schwachen*-Topologie konvergiert, d.h. $\mathrm{Tr}(A_nB) \to \mathrm{Tr}(AB)\,,\ \forall B\in\mathcal{T}(\mathfrak{H})$. Dann gilt

$$\mathrm{Tr}(m(A_n)B) = \mathrm{Tr}(A_n m(B)) \to \mathrm{Tr}(Am(B)) = \mathrm{Tr}(m(A)B)\,,$$

also ist m in dieser Topologie schwach*-stetig. Nach Satz A.7 bedeutet das aber nichts anderes, als daß m σ-schwach stetig ist. ■

Lemma 2.4 *Sei $\mathcal{B}$ eine C*-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, dann gilt* $(\mathcal{B}\cap U(\mathcal{G})')^- = \mathcal{B}^- \cap U(\mathcal{G})'$.

Beweis: Da $m(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ ist, liefert 2.3i) $\mathcal{B}\cap U(\mathcal{G})' = m(\mathcal{B})$. Aber nach 2.3iii) ist m σ-schwach stetig und deshalb schwach stetig auf der Einheitskugel von $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ (siehe A.5), d.h. $m(\mathcal{B})^- = m(\mathcal{B}^-) = \mathcal{B}^- \cap U(\mathcal{G})'$. ■

Für eine Unteralgebra von $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ auf der $\mathcal{G}$ durch Endomorphismen wirkt gilt sicher dann $m(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{B}$ eine von Neumann Algebra, d.h. schwach abgeschlossen ist. Diese Voraussetzungen gelten nun erfreulicherweise für die lokalen Algebren $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$, und das versetzt uns in die Lage die $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ aus Def.2.1 zu identifizieren:

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{F}(\mathcal{O}) \cap U(\mathcal{G})' = m(\mathfrak{F}(\mathcal{O}))\,. \tag{2.9}$$

Und da $\mathfrak{A}$ als der Normabschluß der Vereinigung der $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ definiert und m insbesondere auch normstetig ist, wie man sich leicht überlegt, erhält man

$$\mathfrak{A} = m(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \cap U(\mathcal{G})'\,. \tag{2.10}$$

Kommen wir nun zur interessanten Struktur der Theorie, wie sie aus unseren bisherigen Überlegungen folgt.

§3 Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in Sektoren

Zunächst können wir (2.10) verschärfen:

Lemma 3.1 *Es gilt* $\mathfrak{A}^- = m(\mathfrak{F}^-) = \mathfrak{F}^- \cap U(\mathcal{G})' = U(\mathcal{G})'$.

Beweis: Das folgt aus Lemma 2.4, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{F}$ irreduzibel in $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ ist. ■

Es ist nun naheliegend, eine Zerlegung der Darstellung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{H}$ zu erhalten, indem man eine Zerlegung der Darstellung U der Eichgruppe betrachtet — denn diese Darstellungen kommutieren ja.

Sei also Σ die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $\mathcal{G}$, die in U enthalten sind. Dann kann man die eindeutig bestimmte *Faktorzerlegung* (siehe [Arv76], Thm.2.1.8) von U schreiben als

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathfrak{H}'_\sigma\,, \\ U(g) &= \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(g) \otimes \mathbb{1}'_\sigma\,, \quad \forall g\in\mathcal{G}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Dimension der Räume $\mathfrak{H}'_\sigma$ gibt an, mit welcher Vielfachheit die Darstellungen U_σ auftreten.

Das physikalische Bild ist nun das folgende: Die Observablenalgebra wird auf den gestrichenen Räumen wirken, und die Räume $\mathfrak{H}'_\sigma$ werden Kopien des Vakuumhilbertraums $\mathfrak{H}_0$ sein, falls die Darstellung von $\mathfrak{A}$ darauf treu ist und Kopien von Unterräumen von $\mathfrak{H}_0$, falls das nicht der Fall ist. Außerdem wird der Index σ zwischen inäquivalenten Darstellungen von $\mathfrak{A}$ unterscheiden. Damit repräsentiert $\mathfrak{H}'_\sigma$ den sogenannten **superselection-Sektor**, der durch die Äquivalenzklasse $[\pi_\sigma]$ der irreduziblen Darstellung π_σ von $\mathfrak{A}$ auf ihm bestimmt ist.

Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{A}$ als **physikalisches Spektrum** von $\mathfrak{A}$. Das folgende Theorem realisiert die oben skizzierten Verhältnisse.

Theorem 3.2 *Die Abbildung $\sigma \longrightarrow [\pi_\sigma]$ von Σ in das physikalische Spektrum von $\mathfrak{A}$ ist eineindeutig.*

Beweis: Bezeichne E_σ die Projektion von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathfrak{H}'_\sigma$. Dann ist $E_\sigma \in U(\mathcal{G})' \cap U(\mathcal{G})'' = \mathfrak{A}^- \cap (\mathfrak{A}^-)' = \boldsymbol{Z}(\mathfrak{A}^-)$, nach Lemma 3.1, das heißt $\mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathfrak{H}'_\sigma$ reduziert $\mathfrak{A}^-$. Da $A \in \mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathfrak{H}'_\sigma$ als $\mathbb{1}_\sigma \otimes \pi_\sigma(A)$ wirkt, gelten für zwei Projektoren E_σ , E_τ mit $\sigma \neq \tau$ die Voraussetzungen von Satz A.18. Also sind π_σ und π_τ disjunkt und somit inäquivalent. ■

Wir benötigen nun noch zwei Voraussetzungen, die für uns nur in diesem Abschnitt von Bedeutung sein werden. Wir geben ihnen daher nicht den Status von Axiomen, sondern definieren:

Definition 3.3 *Das lokale Netz $\mathfrak{F}$ (bzw. $\mathfrak{A}$) erfüllt* **Additivität**, *wenn für eine Überdeckung eines beliebigen Doppelkegels $\mathcal{O}$ durch Doppelkegel $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ gilt*

$$\mathfrak{F}(\mathcal{O}) \subset \bigvee_\alpha \mathfrak{F}(\mathcal{O}_\alpha)\,, \qquad \left(\textit{bzw. } \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \bigvee_\alpha \mathfrak{A}(\mathcal{O}_\alpha) \right). \tag{3.2}$$

Und:

Definition 3.4 *Der Vakuumvektor Ω besitzt die* **Cluster-Eigenschaft**, *wenn*

$$\lim_{|x|\to\infty} \langle \Omega | A \alpha_x(B) C \Omega \rangle = \langle \Omega | A C \Omega \rangle \langle \Omega | B \Omega \rangle\,, \tag{3.3}$$

für beliebige Felder $A,\ B,\ C \in \mathfrak{F}$. Die Konvergenz gilt dabei in der Norm und α_x ist der Translationsautomorphismus, der die Verschiebung um x induziert.

Eine Konsequenz der Additivität ist die aus der Wightman-Quantenfeldtheorie bekannte **Reeh-Schlieder-Eigenschaft** (vgl. [Haa92], S.101):

Theorem 3.5 *Der Vakuumvektor eines lokalen Netzes, das Additivität erfüllt ist zyklisch und separierend (siehe Def.A.19) für jede lokale Algebra $\mathfrak{F}(\mathcal{O})$ (bzw. $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$).*

Tatsächlich besitzt nicht nur der Vakuumvektor diese Eigenschaft, sondern eine ganze Klasse von Vektoren, die *analytisch für die Energie* heissen (vgl. [DHR69a], S.5) — wir werden sie aber nur für das Vakuum brauchen. Ein Beweis des Theorems für algebraische Theorien wurde in [Bor68] gegben.

Die Cluster- und Reeh-Schlieder-Eigenschaft benutzend konnte man zeigen, daß in der Zerlegung (3.1) tatsächlich *jede* irreduzible Darstellung von $\mathcal{G}$ auftritt (siehe [DHR69a], Thm.3.6):

Theorem 3.6 *Bezeichne $\widehat{\mathcal{G}}$ die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $\mathcal{G}$, d.h. das* **Spektrum** *von $\mathcal{G}$. Dann gilt $\Sigma = \widehat{\mathcal{G}}$.*

Das ist in groben Zügen die Struktur einer algebraischen Quantenfeldtheorie. Wir legen jetzt die Grundlagen für die Rekonstruktion dieser superselection-Struktur aus noch grundlegenderen Voraussetzungen, das heißt bei Vorgabe der Observablenalgebren als einzig generische Objekte.

§4 Rekonstruktion der Superselection-Struktur

Will man die Struktur der Theorie, wie wir sie in den vorangegangenen Abschnitten gefunden hatten — also insbesondere die Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in superselection-Sektoren — aus der Observablenalgebra rekonstruieren, so ist der Schlüssel dazu die GNS-Konstruktion[3)]. Zu jedem Zustand, d.h. jedem positivem, linearen Funktional über der Observablenalgebra, findet man so einen Hilbertraum, der von der Algebra aus einem zyklischen Vektor — dem Vakuum- bzw. Grundzustandsvektor des Sektors — erzeugt wird, wobei der Vakuumvektor den Zustand, von dem man ausgegangen ist, als Vektorzustand induziert. Superselection-Regeln treten dann auf, weil man auf diese Weise verschiedene inäquivalente Darstellungen von $\mathfrak{A}$ findet.

Bevor man jedoch an diese Konstruktion geht, sollte man tunlichst aus der Menge aller Zustände $\mathcal{S}$ über $\mathfrak{A}$ diejenigen auswählen, die man als physikalisch interessant ansehen möchte und die übrigen von der Betrachtung ausschließen. Das ist mehr als reine Bequemlichkeit! Zum Beispiel muß man sicher fordern, daß in allen Sektoren die Positivität der Energie gilt, wie wir das mit Axiom V getan haben (das ist das *Borchers-Kriterium*, das uns weiter unten noch beschäftigen wird). Die Existenz und Eindeutigkeit eines Vakuumzustands ω_0 und somit der Vakuumdarstellung π_0 haben wir implizit mit den Axiomen III und V angenommen.

Vor der Formulierung des von uns angewandten Kriteriums, sollten wir kurz abschweifen, um eine Grundlegende Forderung an die betrachteten Darstellungen zu stellen: Wir werden zumindest erwarten, daß die Axiome IV und V der Kovarianz und Positivität des Spektrums in allen Sektoren erfüllt sind.

Definition 4.1 *Eine Darstellung π von $\mathfrak{A}$ heißt* **kovariant**, *wenn eine stark stetige Darstellung der U_π der universellen Überlagerung $\widetilde{\mathcal{P}}$ der Poincarégruppe existiert, so daß gilt:*

$$\widetilde{L}\in\widetilde{\mathcal{P}}\,,\ A\in\mathfrak{A}\ :\quad \pi(\alpha_L(A)) = U_\pi(\widetilde{L})\pi(A)U_\pi(\widetilde{L})^{-1}\,, \tag{4.1}$$

(wobei L das Bild von $\widetilde{L}$ unter der Überlagerungsabbildung ist). Weiter heißt eine kovariante Darstellung **energiepositiv**, *wenn U_π die Spektrumsbedingung aus Axiom V erfüllt.*

Das man in anderen als dem Vakuumsektor zur universellen Überlagerung $\widetilde{\mathcal{P}}$ übergeht (während auf den lokalen Algebren immer noch $\mathcal{P}$ durch α_L geometrisch wirkt), beruht einfach auf der Erwartung, in geladenen Sektoren Spinordarstellungen zu finden, was nur möglich ist, wenn man dort die zweifache Überlagerung $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ der eigentlichen Lorentzgruppe wriken läßt. Da dieser Punkt für uns bei der Analyse der superselection-Struktur im nächsten Kapitel nicht wichtig sein wird, führen wir die Unterscheidung von $\widetilde{L}$ und L im folgenden nicht durch. Der Leser sollte sie aber in Erinnerung behalten.

Die erste Grundforderung, die ist also: Alle betrachteten Darstellungen der Observablenalgebra sollen kovariant im Sinne obiger Definition sein.

Das Auswahlkriterium, das wir nun auf die Menge der kovarianten Darstellungen anwenden werden, ist das sogenannte *DHR-Kriterium*, das zuerst in [DHR69b] formuliert wurde. Doplicher, Haag und Roberts vermuteten, daß dieses Kriterium auf alle Theorien anwendbar sein würde, die ausschließlich massive Teilchen in Form einer Streutheorie beschreiben, also insbesondere auf alle Näherungen der hadronischen Elemntarteilchenphysik. Das Kriterium lautet:

[3)] Dies ist der Grundgedanke der axiomatischen Qauntentheorie. Eine vorzügliche Schilderung dieses Programms findet man in [Bog90].

$\boxed{\boxed{VIII}}$ **(DHR-Kriterium)** *Wir betrachten im folgenden Darstellungen π der Observablenalgebra, die* **stark lokal äquivalent** *sind zur Vakuumdarstellung π_0, in dem Sinne, daß für alle Doppelkegel $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$*

$$\pi|\mathfrak{A}(\mathcal{O}') \cong \pi_0|\mathfrak{A}(\mathcal{O}')\,, \tag{4.2}$$

gilt. Dabei bezeichnet $\pi|\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ die Einschränkung der Darstellung π von $\mathfrak{A}$ auf die Unteralgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$.

Daß man die Darstellungen in *jedem beliebigen* Doppelkegel lokalisieren kann, spiegelt die Punktartigkeit der beschriebenen Teilchen wieder: Das Lokalisierungsgebiet der Darstellung läßt sich beliebig verkleinern. Darstellungen die dieses Kriterium erfüllen, heißen im allgemeinen **lokalisierbar in Doppelkegeln**, Wir verwenden der Kürze halber die Bezeichnung **DHR-Darstellung**.

Es ist eine überrachende und wichtige Tatsache, daß DHR-Darstellungen zugleich energiepositiv sind, wie wir später in §13 zeigen werden.

Das DHR-Kriterium bedeutet nichts anderes, als daß in jedem Sektor, in dem ein Teilchen anwesend ist, dieses in einem Doppelkegel lokalisiert werden kann, in dem Sinne, daß es außerhalb dieses Gebiets keine Observable gibt, mit der man dieses Teilchen nachweisen könnte. Mit anderen Worten werden alle Zustände, die dieses Kriterium erfüllen, für hinreichend grße raumartige Abstände ununterscheidbar vom Vakuumzustand. Dies drückt der folgende Satz aus:

Satz 4.2 *Sei $(\mathcal{O}_n)$ eine gerichtete Menge von Doppelkegeln, die die ganze Raumzeit ausfüllen, d.h. $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_{n+1}$, $\bigcup_n \mathcal{O}_n = \mathcal{M}$. Ist ω ein Zustand aus dem Folium (siehe Def.A.14) einer Darstellung, die das DHR-Kriterium erfüllt, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (\omega - \omega_0)|_{\mathcal{O}'_n} \right\| = 0\,. \tag{4.3}$$

Dabei bezeichnet $\omega|_{\mathcal{O}'}$ die Einschränkung des linearen Funktionals ω auf $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$.

Beweis: Nehmen wir also an, daß die Darstellung π, in der ω ein normaler Zustand ist, das DHR-Kriterium erfüllt. Dann gibt es für einen gewissen Doppelkegel $\mathcal{O}$ einen unitären Operator V von $\mathfrak{H}_0$ auf $\mathfrak{H}_\pi$, so daß

$$\pi(A) = VAV^{-1}\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')\,, \tag{4.4}$$

gilt. Angenommen (4.3) sei falsch. Dann gibt es eine Folge $(\mathcal{O}_{n_i}) \subset (\mathcal{O}_n)$ und Operatoren B_i aus der Einheitskugel von $\mathfrak{A}(\mathcal{O}'_{n_i})$, so daß für alle $i = 1, 2, \ldots$ gilt:

$$|(\omega - \omega_0)(B_i)| > \varepsilon > 0\,. \tag{4.5}$$

Da die Einheitskugel von $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)$ schwach kompakt ist (Satz A.6), können wir o.B.d.A. annehmen, daß B_i im schwachen Sinne gegen einen Operator B konvergiert (wir müssen nur eine konvergente Teilfolge auswählen). Die Operatoren B_i liegen nach Voraussetzung in $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_{n_i})' \supset \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_{n_i})$. B als schwacher Limes der Folge B_i liegt daher im schwachen Abschluß von $\bigcap_i \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{n_i})' = \left\{ \bigcup_i \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{n_i}) \right\}'$. Das heißt

$$B \in \left\{ \left(\bigcup_i \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{n_i}) \right)' \right\}^{-} = \left\{ \left(\bigcup_i \mathfrak{A}(\mathcal{O}_{n_i}) \right)^{-} \right\}' = (\mathfrak{A}^{-})'\,,$$

Wobei wir zur Vertauschung von schwachem Abschluß und Kommutantenbildung das von Neumann Bikommutant-Theorem benutzt haben. Da die Darstellung π_0 irreduzibel ist, folgt, daß B ein Vielfaches der Identität ist: $B = c \cdot \mathbb{1}$. Insbesondere ist nun $B \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_{n_i})$, da alle diese Algebren die Identität enthalten. Für hinreichend große i enthält $\mathcal{O}_{n_i}$ $\mathcal{O}$ und wegen (4.4) ist ω also normal auf $\mathfrak{A}(\mathcal{O}'_{n_i})$, d.h. schwach stetig auf der Einheitskugel dieser Algebra (nach Satz A.11 und Satz A.6). Man kann deshalb (4.5) auf den schwachen Limes B übertragen; wir finden so:

$$|(\omega - \omega_0)(B)| > \varepsilon \, .$$

Aber $B = c \cdot \mathbb{1} \Longrightarrow \omega(B) = \omega_0(B) = c$, im Widerspruch zu (4.5). ■

Später (§13) werden wir zeigen können, daß das DHR-Kriterium kompatibel ist mit Axiom V, d.h. daß in allen durch das Kriterium bestimmten Darstellungen die Spektrumsbedingung gilt.

Unglücklicherweise ist das DHR-Kriterium aber zu restriktiv, um Eichtheorien mit langreichweitigen Wechselwirkungen, wie zum Beispiel die Quantenelektrodynamik, einzuschliessen. Denn ein Zustand, d.h. ein Teilchen, daß elektrische Ladung trägt erzeugt einen konstanten Fluß der elektrischen Feldstärke durch eine Sphäre mit beliebigem Radius, die diese Ladung umschließt. Dieser Effekt ist meßbar in jedem $\mathcal{O}'_n$ und verchwindet nicht für $n \to \infty$, d.h. ein solcher Zustand kann im kausalen Komplement jeder beliebigen beschränkten Region der Raumzeit vom Vakuum unterschieden werden. Das Auftreten solcher Ladungen ist typisch für Eichfeldtheorien, man nennt sie daher auch **Eichladungen**.

Im Gegensatz dazu steht das **Borchers-Kriterium**: Man fordert hier ausschließlich die Gültigkeit von Axiom V in allen Darstellungen, d.h. die Positivität der Energie. Wir werden, wie oben schon erwähnt, in §13 sehen daß die Zustände des DHR-Kriteriums eine Untermenge derer des Borchers-Kriteriums sind (weil in allen Darstellungen die Spektrumsbedingung gilt). Es wurde zuerst 1965 in [Bor65b] und [Bor65a] untersucht. Diese Analyse enthielt aber leider einige schwer nachweisbare Fehler, die sich dadurch bemerkbar machten, daß man zu einigen Folgerungen physikalische Gegenbeispiele finden konnte. Das war die eigentliche Motivation für Rudolf Haag, das DHR-Kriterium als leichter zu behandelnden Ansatz vorzuschlagen.

In jüngerer Zeit haben Buchholz und Fredenhagen eine eingehende und sehr erfolgreiche Analyse des Borchers-Kriteriums unternommen ([BF82]). Erfolgreich war sie vor allem in dem Sinne, daß man einen Großteil der Struktur, die man unter dem DHR-Kriterium findet rekonstruieren kann — mit gewissen Einschränkungen, die sich notwendig ergeben und vor allem die Lokalisation der geladenen Zustände betreffen.

Dies rechtfertigt es im nachhinein, sich bei grundsätzlichen Untersuchungen auf das DHR-Kriterium zu beschränken, wie wir es hier tun.

Weiter fordern wir:

$\boxed{IX}$ **(Haag-Dualität im Vakuumsektor)** *Für die Vakuumdarstellung π_0 gilt*

$$\pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O}'))' = \pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) \, , \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{K} \, . \tag{4.6}$$

Diese Eigenschaft der Vakuumdarstellung erweist sich als wesentlich für viele unserer folgenden Überlegungen. Wie wir gesehen haben, bedeutet dies, daß die Darstellung der Eichgruppe im Vakuumsektor eindimensional und daher abelsch ist — das Vakuum soll also keine nichtabelsche Ladung tragen. Das klingt physikalisch plausibel, aber ein besseres Verständnis dieser Forderung wäre dennoch wünschenswert.

Wenden wir uns nun der Frage zu, wie wir die verschiedenen Sektoren vom Vakuumsektor aus erreichen.

§5 Lokalisierte Morphismen

Definition 5.1 *Sei ρ ein* ***-Morphismus** *der Observablenalgebra, d.h. eine normstetige Abbildung*

$$\begin{aligned} &\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}, \quad A \mapsto \rho(A), \\ &\forall A, B \in \mathfrak{A} : \ \rho(AB) = \rho(A)\rho(B), \quad \rho(A^*) = \rho(A)^*, \quad \rho(\mathbb{1}) = \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

ρ heißt **lokalisiert in $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$**, *wenn*

$$\rho(A) = A, \quad \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}'). \tag{5.2}$$

Das bedeutet, ρ wirkt trivial im raumartigen Komplement von $\mathcal{O}$. Der identische Morphismus ι ist in jedem Doppelkegel lokalisiert.

Als extremes Beispiel ist der identische Morphismus ι in jedem $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ lokalisiert. Wie schon erwähnt wird $\pi_0(\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}$ identifiziert und deshalb π_0 oft weggelassen.

Aus dieser Definition und (5.2) folgt:

Bemerkung 5.2 *Ist ρ lokalisiert in $\mathcal{O}$ und $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$, mit $\mathcal{O}_1 \supseteq \mathcal{O}$, so ist $\rho(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$, ist $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, so gilt $\rho(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$.*

Beweis: Sei $B \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1') \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$. Dann gilt $B\rho(A) = \rho(BA) = \rho(AB) = \rho(A)B$, d.h. $\rho(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$. Im zweiten Fall ist A wegen der Isotonie auch in $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ und die Aussage folgt wie zuvor. ■

Definition 5.3 *Die durch $\pi_0 \circ \rho$ definierte Darstellung von $\mathfrak{A}$ wird mit π_ρ bezeichnet.*

i) Zwei Morphismen ρ, γ heißen **unitäräquivalent** *(oder einfach* **äquivalent***), in Zeichen $\rho \cong \gamma$, wenn die entsprechenden Darstellungen unitäräquivalent sind, vermittelt durch ein unitäres $U \in \mathfrak{A}$:*

$$\pi_\rho(A) = U\pi_\gamma(A)U^{-1} = \pi_0(U)\pi_0(\gamma(A))\pi_0(U^{-1}) = \pi_0(U\gamma(A)U^{-1}),$$

d.h. genau dann, wenn

$$\rho = \sigma_U \circ \gamma,$$

mit dem lokalisierten Morphismus $\sigma_U(A) \equiv UAU^{-1}$, $\forall A \in \mathfrak{A}$. Die Unitäräquivalenzklasse von ρ wird mit $[\rho]$ bezeichnet und heißt der **Sektor** *ρ.*

ii) Ein Morphismus ρ von $\mathfrak{A}$ heißt **innerer Morphismus**, *wenn er durch Adjunktion mit einer Observablen $V \in \mathfrak{A}$ entsteht, d.h., wenn*

$$\rho(A) = \sigma_V(A) \equiv VAV^{-1}, \quad \forall A \in \mathfrak{A},$$

sonst heißt ρ **äußerer Morphismus**.

iii) Ein Morphismus ρ heißt **irreduzibel**, *wenn π_ρ irreduzibel ist.*

iv) Ein Morphismus ρ und der zugehörige Sektor heißen **einfach**, *wenn ρ ein Automorphismus ist, d.h., wenn ρ^{-1} auf ganz $\mathfrak{A}$ definiert ist.*

Natürlich sind alle einfachen Morphismen irreduzibel. Weiter sorgt die Haag-Dualität dafür, daß alle lokalisierten Morphismen, die durch Adjunktion mit einem Operator $V \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)$ entstehen, innere Morphismen von $\mathfrak{A}$ sind.

Bemerkung 5.4 *Angenommen für* $V \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *ist* σ_V *sei ein in* $\mathcal{O}$ *lokalisierter Morphismus von* $\mathfrak{A}$ *. Dann ist* $V \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ *.*

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ mit $\mathcal{O}_1 \between \mathcal{O}$, dann gilt $VA = AV$, d.h. $V \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ wegen der Haag-Dualität. ∎

Warum hofft man nun überhaupt, mit lokalisierten Morphismen die Struktur der superselection-Sektoren wiedergewinnen zu können, die wir in §3 gefunden hatten? Im Rahmen des DHR-Kriteriums macht dies folgender Satz klar:

Satz 5.5 *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

i) $\pi|\mathfrak{A}(\mathcal{O}') \cong \pi_0|\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$.

ii) $\pi \cong \pi_0 \circ \rho$,

wobei ρ *ein lokalisierter Morphismus von* $\mathfrak{A}$ *mit Lokalisierungsgebiet* $\mathcal{O}$ *ist.*

Beweis: ii) $\Longrightarrow$ i) ist trivial. Betrachten wir eine Darstellung auf dem Hilbertraum $\mathfrak{H}_\pi$, die i) erfüllt. Dann können wir einen unitären Operator $V : \mathfrak{H}_0 \to \mathfrak{H}_\pi$ auswählen, so daß

$$\pi(A)V = VA , \quad \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}') ,$$

gilt (Hier wird wieder π_0 weggelassen. Später werden wir V einen *unitären Intertwiner* vom Vakuumsektor in den Sektor $[\rho]$ nennen). Definiert man für *beliebige* $A \in \mathfrak{A}$

$$\rho(A) \equiv V^{-1}\pi(A)V ,$$

so findet man $\rho(A) \in \mathfrak{A}$. Dies prüft man zunächst für $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$, $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}$, denn diese Elemente liegen dicht in $\mathfrak{A}$ und nach der Definition ist ρ eine lineare, beschränkte ($||\rho(A)|| \leq ||A||$) Operation auf $\mathfrak{A}$ und daher stetig. In diesem Fall kommutiert $\rho(A)$ mit $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1')$, denn $B \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1') \Rightarrow B \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$, und damit $\rho(A)B = V^{-1}\pi(A)VB = V^{-1}\pi(A)\pi(B)V = V^{-1}\pi(AB)V = V^{-1}\pi(BA)V = BV^{-1}\pi(A)V$. D.h. $\rho(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$, wegen der Haag-Dualität. Damit haben wir gezeigt, daß

$$A \mapsto \rho(A) \in \mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0) ,$$

eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ definiert, die äquivalent ist zu π. ∎

Man kann also alle DHR-Darstellungen durch in Doppelkegeln lokalisierte Morphismen erreichen!

Da jede DHR-Darstellung in jedem beliebigen Doppelkegel lokalisiert werden kann, kann man die Konstuktion des obigen Satzes für $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{K}$ durchführen und erhält so zwei Morphismen

$$\rho_1(A) \equiv V_1^{-1}\pi(A)V_1 ,$$
$$\rho_2(A) \equiv V_2^{-1}\pi(A)V_2 , \quad \forall A \in A .$$

Dann sind aber diese beiden Morphismen unitäräquivalent:

$$\rho_1(A) = \sigma_U \circ \rho_2(A) , \quad \text{mit } U = V_1^{-1}V_2 \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}) ,$$

wobei $\mathcal{O}$ ein Doppelkegel ist, der $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ umfaßt. Die Lokalisierung folgt dabei aus Bem. 5.4, denn auf $\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ wirken sowohl ρ_1 wie auch ρ_2 trivial, d.h.

$$AU = \rho_1(A)U = U\rho_2(A) = UA\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')\,,$$

also $U \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Das führt zu folgender Setzung:

Definition und Bemerkung 5.6 *Ist ρ_i in $\mathcal{O}_i$ lokalisiert für $i = 1, 2$, dann heißt ein unitärer Operator U mit der Eigenschaft*

$$\rho_2(A)U = U\rho_1(A)\,, \quad \forall A \in A\,, \tag{5.3}$$

Ladungstransferoperator *von ρ_1 nach ρ_2. Ein in $\mathcal{O}$ lokalisierter Morphismus heißt* **transportabel**, *wenn zu jedem $\widehat{\mathcal{O}} \in \mathcal{K}$ ein Ladungstransferoperator von ρ nach $\widehat{\rho}$ existiert, wobei $\widehat{\rho}$ in $\widehat{\mathcal{O}}$ lokalisiert ist. Es gilt:*

i) Jeder Ladungstransferoperator ist eine lokale Observable aus $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O}$ ein beliebiger Doppelkegel ist, der $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ umfaßt, und

ii) genau dann induziert ein Morphismus eine DHR-Darstellung, wenn er transportabel ist.

Poincaré-Kovarianz soll auch in den durch lokalisierte Morphismen erzeugten Sektoren gelten, um konsistent mit der Forderung nach kovarianten Darstellungen zu sein. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung *kovarianter* Morphismen:

Definition 5.7 *Ein lokalisierter Morphismus ρ heißt* **kovariant**, *wenn eine unitäre, stark stetige Darstellung U_ρ der universellen Überlagerung der Poincarégruppe $\widetilde{\mathcal{P}}$ existiert, so daß*

$$\widetilde{\mathcal{P}} \ni \widetilde{L} \longmapsto U_\rho(\widetilde{L}) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)\,, \quad \pi_0 \circ \rho \circ \alpha_L(A) = U_\rho(\widetilde{L})\pi_0(\rho(A))U_\rho(\widetilde{L})^{-1}\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{5.4}$$

Die $U_\rho(\widetilde{L})$ heißen **Kovarianzoperatoren** *Die Menge der transportablen, kovarianten und lokalisierten Morphismen wird mit Δ, die Untermenge der irreduzibeln Morphismen aus Δ wird mit Δ_{irr} bezeichnet. $\Delta(\mathcal{O})$, $\Delta_{\mathrm{irr}}(\mathcal{O})$ bezeichnen die von den in $\mathcal{O}$ lokalisierten Morphismen aus Δ bzw. Δ_{irr} gebildeten Mengen.*

Hier haben wir die Vakuumdarstellung π_0 explizit hingeschrieben, damit sofort klar ist, daß mit dieser Definition die Darstellung $\pi_\rho = \pi_0 \circ \rho$ kovariant ist im Sinne von (4.1). Ab jetzt werden wir die Unterscheidung zwischen $\widetilde{L}$ und L nicht mehr durchführen.

Um zu wissen, daß die Klassen der Sektoren die durch kovariante DHR-Darstellungen beschrieben wird mit der der durch kovariante Morphismen beschriebenen übereinstimmt, bliebe noch die Umkehrung zu zeigen, d.h. daß der zu einer kovarianten Darstellung π gehörige Morphismus ρ auch kovariant ist. Das können wir aber erst in §10 zeigen (Korollar 10.5).

Wo immer im folgenden lokalisierte Morphismen benutzt werden sind, falls nicht anders festgelegt, solche aus Δ gemeint. Es ist zu beachten, daß die Darstellungsoperatoren $U_\rho(L)$ im allgemeinen nicht in $\mathfrak{A}$ liegen, denn ihre Wirkung ist nichtlokal. Genauso ist $\rho \circ \alpha_L$ kein lokalisierter Morphismus. Die allgemeinste Form für ein $U_\rho(L)$ ist $V_\rho(L)\pi_0(W_\rho(L))$, also eine Kombination aus **nichtlokalem Anteil** und **Observablenanteil**, wobei letzterer nach Definition immer unter der Vakuumdarstellung steht.

Als technische Voraussetzung benötigen wir noch:

$\boxed{X}$ **(Borchers-Eigenschaft B)** *Seien $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ mit $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ beliebig gegeben und $E \neq 0$ ein Projektor aus $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$. Dann ist E äquivalent zur Identität in der gößeren Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2) \supset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$. Das bedeutet: Es existiert eine Isometrie $W \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$ mit $WW^* = E$, $W^*W = 1\!\!1$.*

Eine wichtige Aussage über die Abgeschlossenheit von Δ, die auch Licht auf den Sinn der Borchers-Eigenschaft wirft, ist der folgende

Satz 5.8 *Die Menge der durch Δ induzierten Darstellungen von $\mathfrak{A}$, d.h. der zulässigen Darstellungen des DHR-Kriteriums, ist abgeschlossen gegenüber der Bildung endlicher direkter Summen und (nichttrivialer) Unterdarstellungen.*

Beweis: Zunächst zu Unterdarstellungen: Sei π eine unter dem DHR-Kriterium zulässige Darstellung, d.h. $\pi \cong \pi_0 \circ \rho$ mit $\rho \in \Delta(\mathcal{O})$, und $0 \neq P \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)$ eine Projektion auf eine nichttriviale Unterdarstellung von π, d.h. $P\pi_0 \circ \rho(A) = \pi_0 \circ \rho(A)P$, $\forall A \in \mathfrak{A}$. Dann ist für $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ $P\pi_0(A) = \pi_0(A)P$, d.h. $P \in \pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O}')') = \pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O}))$ mit der Haag-Dualität im Vakuumsektor. D.h. es gibt ein E in $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \cap \rho(\mathfrak{A})'$ mit $P = \pi_0(E)$, wobei E eine selbstadjungierte Projektion ist. Dann gibt es nach der Borchers-Eigenschaft eine Isometrie $W \in \mathfrak{A}$ mit $WW^* = E$, also $\pi_0(W)\pi_0(W)^* = P$. Setze

$$\rho_E(A) \equiv W^*\rho(A)W, \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Dann ist ρ_E ein Morphismus von $\mathfrak{A}$, der lokalisiert ist in $\mathcal{O}$, denn für $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ ist $\rho_E(A) = W^*AW = W^*WA = A$. Und es gilt

$$\pi_0 \circ \rho_E(A) = \pi_0(W)^*\pi_0 \circ \rho(A)\pi_0(W), \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als daß $\pi_0 \circ \rho_E$ äquivalent ist zu $\pi_0 \circ \rho | P\mathfrak{H}_0$, also zur Einschränkung von $\pi_0 \circ \rho$ auf $P\mathfrak{H}_0$. Es bleibt zu zeigen, daß ρ_E kovariant ist. Setze $U_{\rho_E}(L) \equiv W^*U_\rho(L)W$ für $L \in \mathcal{P}$. $U_{\rho_E}(L)$ ist stark stetig in L, da U_ρ stark stetig und W eine Isometrie ist. Dann ist

$$\begin{aligned} U_{\rho_E}(L)\rho_E(A)U_{\rho_E}(L)^{-1} &= W^*U_\rho(L)WW^*\rho(A)WW^*U_\rho(L)^{-1} = \\ &= W^*U_\rho(L)E\rho(A)EU_\rho(L)^{-1}W = W^*U_\rho(L)\rho(A)U_\rho(L)^{-1}W = \\ &= W^*\rho(\alpha_L(A))W = \rho_E(\alpha_L(A)), \end{aligned}$$

was zeigt, daß ρ_E kovariant ist. Dabei haben wir benutzt, daß $E \in \rho(\mathfrak{A})'$ ist, und daß $U_\rho(L)$ mit E kommutiert, d.h. daß $U_\rho(L) \in \rho(\mathfrak{A})''$ gilt. Diese besondere Eigenschaft der $U_\rho(L)$ für kovariante, lokalisierte ρ können wir leider erst sehr viel später in §10, Satz 11.9ii) beweisen. Sie aber zunächst einmal ohne Bedenken benutzend, konnten wir oben den zweiten Projektor E mit $\rho(A)$ vertauschen, sodann das Ergebnis $E^2 = E$ durch $U_\rho(L)$ hindurchziehen, was ganz links die Kombination W^*WW^* ergibt, und das reduziert sich wegen $W^*W = 1\!\!1$ auf W^*, wie es sein muß. Nun zu direkten Summen: Sei $\rho_i \in \Delta(\mathcal{O}_i)$, $\pi_i \cong \pi_0 \circ \rho_i$, $i = 1, 2$. Setze $\pi \equiv \pi_1 \oplus \pi_2$ und wähle einen Projektor $0 < E < 1\!\!1$, $E \in \mathfrak{A}$ auf die Unterdarstellung π_1. Dann gibt es nach der Borchers-Eigenschaft Isometrien W_1, $W_2 \in \mathfrak{A}$ mit $W_1W_1^* = E$, $W_2W_2^* = 1\!\!1 - E$, d.h. $W_1W_1^* + W_2W_2^* = 1\!\!1$. Setze

$$\rho(A) \equiv W_1\rho_1(A)W_1^* + W_2\rho_2(A)W_2^*.$$

Dann ist ρ ein Morphismus von $\mathfrak{A}$, der in $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ lokalisiert ist. Weiter ist für alle $A \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned}\pi_0 \circ \rho(A) &= \pi_0(W_1\rho_1(A)W_1^* + W_2\rho_2(A)W_2^*) = \\ &= \pi_0(W_1)\pi_0 \circ \rho_1(A)\pi_0(W_1)^* + \pi_0(W_2)\pi_0 \circ \rho_2(A)\pi_0(W_2)^* = \\ &= V_1\pi_1(A)V_1^* + V_2\pi_2(A)V_2^* ,\end{aligned}$$

mit $V_i = \pi_0(W_i)U_i$, $U_i\pi_i(A)U_i^* = \pi_0 \circ \rho_i(A)$, $i = 1, 2$. Das bedeutet, $\pi_0 \circ \rho \cong \pi_1 \oplus \pi_2$. Die Kovarianz von ρ zeigt man wie oben, diesmal mit $U_\rho(L) \equiv W_1U_{\rho_1}(L)W_1^* + W_2U_{\rho_2}(L)W_2^*$. ■

Wir vereinbaren noch, daß im allgemeinen der Morphismus der eine Unterdarstellung erzeugt mit $\rho|_E$ bezeichnet wird (wenn E der zugehörige Projektor aus $\rho(\mathfrak{A})'$ ist), und für den Morphismus, der eine direkte Summe von Darstellungen erzeugt, schreiben wir $\bigoplus_j \rho_j$ wenn die ρ_j die Summanden erzeugen. Gelegentlich werden wir $\rho|_E$ auch einfach Unterdarstellung nennen.

Die Borchers-Eigenschaft ist also eine Forderung, die man an die abstrakte C*-Algebra $\mathfrak{A}$ stellt, damit ihre Konkretisierungen auf $\mathfrak{H}_0$ vernünftige Eigenschaften haben.

Bemerkung 5.9 *Die Morphismen aus Δ sind sämtlich Isometrien, d.h.*

$$||\rho(A)|| = ||A|| , \quad \forall A \in \mathfrak{A} . \tag{5.5}$$

für alle Morphismen $\rho \in \Delta$.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 5.5 reicht es, die Aussage für lokale Observablen $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ zu zeigen. Da nun ρ kovariant ist, existiert ein Morphismus $\rho' \in \Delta(\mathcal{O}_1)$, so daß $\rho' = \sigma_U \circ \rho$ mit unitärem U und $\mathcal{O}_1 \between \mathcal{O}$ gilt. Dann ist $\rho'(A) = A$ und $\rho(A) = U\rho'(A)U^{-1} = UAU^{-1}$, woraus die Aussage folgt. ■

Ein wichtiges Beispiel kovarianter lokalisierter Morphismen sind die, die durch Adjunktion mit einem unitären $U \in \mathfrak{A}$ entstehen:

Definition 5.10 *Die Zuordnung*

$$\mathfrak{A} \ni U \mapsto \sigma_U , \quad \sigma_U(A) \equiv UAU^{-1} , \quad \forall A \in \mathfrak{A} ,$$

ordnet jeder unitären Observable einen kovarianten lokalisierten Morphismus $\sigma_U \in \Delta$ zu. Die von diesen Morphismen erzeugte Untermenge von Δ wird mit $\mathcal{I}$ bezeichnet.

Lemma 5.11 *Genau dann sind ρ_1 , $\rho_2 \in \Delta$ äquivalent, wenn $\rho_2 = \sigma_U\rho_1$, mit $\sigma_U \in \mathcal{I}$.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“ ist klar, und „$\Longleftarrow$“ folgt aus Bem. 5.6 ■

Lemma 5.12 *Seien ρ_1 , $\rho_2 \in \Delta$. Dann hängt die Äquivalenzklasse des Produkts nur von den Äquivalenzklassen der Faktoren ab. Durch*

$$[\rho_1][\rho_2] \equiv [\rho_1\rho_2] , \tag{5.6}$$

wird also ein Produkt von Äquivalenzklassen von Darstellungen von $\mathfrak{A}$, d.h. von Sektoren definiert.

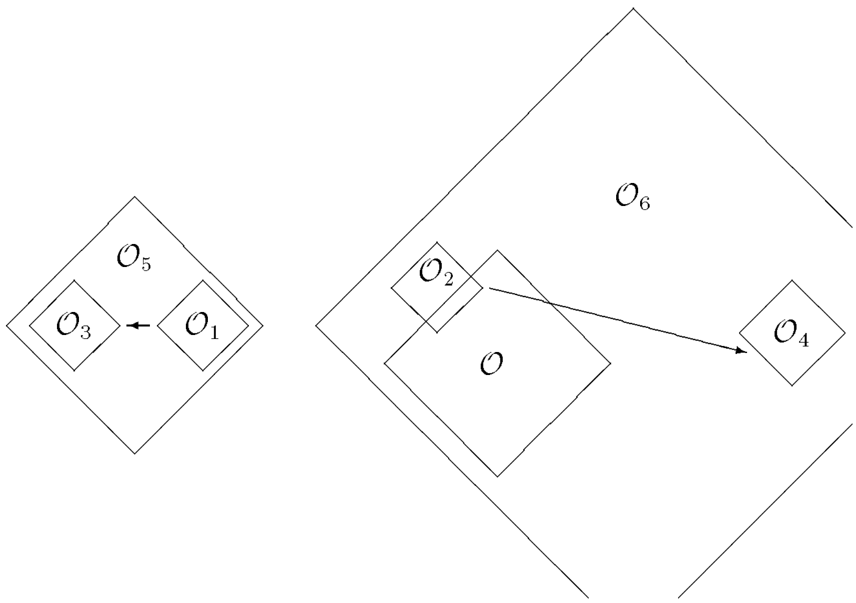


Fig. 5.1: Skizze zum Beweis des Lemmas. In der dargestellten Situation wäre es gar nicht nötig, den Doppelkegel 1 zu verschieben. Das geschieht nur der Übersicht halber.

Beweis: Sind $\rho_i' \cong \rho_i$, $i = 1, 2$, d.h. $\rho_i' = \sigma_{U_i}\rho_i$, $\sigma_{U_i} \in \mathcal{I}$, so gilt

$$\begin{aligned}\rho_1'\rho_2'(A) = \sigma_{U_1}\rho_1\sigma_{U_2}\rho_2(A) &= U_1\rho_1(U_2\rho_2(A)U_2^{-1})U_1^{-1} = \\ &= U_1\rho_1(U_2)\,\rho_1(\rho_2(A))\,\rho_1(U_2)^{-1}U_1^{-1} = \sigma_W\rho_1\rho_2(A)\,,\end{aligned}$$

mit $\sigma_W \in \mathcal{I}$, $W \equiv U_1\rho_1(U_2)$. ■

Das folgende Lemma wirft einiges Licht auf die Bedeutung der Transportabilität der Morphismen.

Lemma 5.13 *Morphismen, deren Lokalisierungsgebiete raumartig zueinander liegen, kommutieren.*

Beweis: Sei $\rho_i \in \Delta(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$, $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, und sei $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Dann kann man durch Anwendung von Ladungstransferoperatoren $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ in neue Doppelkegel $\mathcal{O}_3$ resp. $\mathcal{O}_4$ verschieben, so daß folgendes gilt:

i) $O_3 \times \mathcal{O}_4$, $\mathcal{O} \times \mathcal{O}_3$, und $\mathcal{O} \times \mathcal{O}_4$,

ii) Es existieren $\mathcal{O}_5$, $\mathcal{O}_6 \in \mathcal{K}$, mit $\mathcal{O}_5 \times \mathcal{O}_6$, so daß $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 \subset \mathcal{O}_5 \times \mathcal{O}_2$, und $\mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_4 \subset \mathcal{O}_6 \times \mathcal{O}_1$.

Diese Situation ist in Fig.5.1 veranschaulicht. Da die ρ_i aus Δ sind, gibt es $\rho_1' = \sigma_{U_1}\rho_1 \in \Delta(\mathcal{O}_3)$ und $\rho_2' = \sigma_{U_2}\rho_2 \in \Delta(\mathcal{O}_4)$, wobei nach Bem. 5.6 $U_1 \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_5)$ und $U_2 \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_6)$ gewählt werden kann. $\mathcal{O}_3$, $\mathcal{O}_4$ liegen nun beide raumartig zu $\mathcal{O}$, d.h. ρ_1' , ρ_2' wirken trivial auf $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$: $\rho_1'\rho_2'(A) = \rho_2'\rho_1'(A) = A$, $\forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Das ist gleichbedeutend mit $\sigma_{U_1}\rho_1\sigma_{U_2}\rho_2(A) = \sigma_{U_2}\rho_2\sigma_{U_1}\rho_1(A)$, $\forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Schreibt man die linke Seite aus, so erhält man $U_1\rho_1(U_2\rho_2(A)U_2^{-1})U_1^{-1} = U_1U_2\rho_1\rho_2(A)U_2^{-1}U_1^{-1}$, weil $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_6$ und deshalb $\rho_1(U_2) = U_2$ ist. Genauso erhält man für die rechte Seite $U_2\rho_2(U_1\rho_1(A)U_1^{-1})U_2^{-1} = U_1U_2\rho_2\rho_1(A)U_2^{-1}U_1^{-1}$, wobei zuletzt noch benutzt wurde, daß U_1 und U_2 kommutieren, da $\mathcal{O}_5 \times \mathcal{O}_6$. Daraus folgt, weil $\mathcal{O}$ beliebig vorgegeben wurde, $\rho_1\rho_2(A) = \rho_2\rho_1(A)$, $\forall A \in \mathfrak{A}$, also $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$, wie behauptet. ■

Damit haben wir das folgende wichtige Ergebnis:

Lemma 5.14 *Δ ist eine Halbgruppe, $\Delta/\mathcal{I}$ ist eine abelsche Halbgruppe.*

Beweis: Das wesentliche, nämlich, daß das Produkt auf $\Delta/\mathcal{I}$ wohldefiniert ist, haben wir schon in Lemma 5.12 gezeigt. Außerdem ist das Produkt von Äquivalenzklassen kommutativ, denn wir können Repräsentanten mit Morphismen aus $\mathcal{I}$ die Translationen implementieren immer so verschieben, daß sie raumartig zueinander liegen. Dann kommutieren sie nach Lemma 5.13. ■

Es ist klar, daß Δ nur eine Halbgruppe sein kann, denn erstens hat man, da wir nicht nur Automorphismen betrachten, keine Inversion in Δ, und zweitens können wir jetzt noch nicht leicht zeigen, daß das Produkt zweier kovarianter Morphismen wieder kovariant ist. Dazu benötigen wir Methoden, die wir im Zusammenhang mit *Intertwinern* in §6 kennenlernen und in §10 benutzen werden.

Damit haben wir alle grundlegenden Begriffe zusammengetragen, die wir im nächsten Kapitel benutzen werden, um physikalische Sturkturen der algebraischen Theorie aufzudecken.

KAPITEL II

Lokale Observablen und Statistik

Überblick

Das wesentliche Werkzeug zur Untersuchung der DHR-Morphismen einer gegebenen Observablenalgebra sind *Intertwiner*, das sind Operatoren, die zwischen verschiedenen Sektoren vermitteln. Das Konzept wird in §6 eingeführt. Es ist eine Folge der Haag-Dualität, daß Intertwiner zwischen lokalisierten Morphismen selbst lokale Observablen sind. Es werden zwei natürliche Verknüpfungen zwischen Intertwinern eingeführt, von denen die wichtigere die $\times$-Operation ist, die aus Intertwinern einzelner Sektoren Intertwiner von Produkten, z.B. von $\rho_1\rho_2$ nach $\rho_1'\rho_2'$, erzeugt.

Mit dieser Verknüpfung wird dann in §7 die *Statistik* der superselection-Sektoren betrachtet. Statistik bedeutet hierbei die Vertauschung von Morphismen und zentral dafür ist der *statistische* Operator ε, ein Intertwiner, der genau dies bewerkstelligt. Es zeigt sich, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen Statistik in mehr als $1+1$ Dimensionen und der in solch niederdimensionalen Räumen besteht: Die klassische Permutationsgruppenstatistik, die die übliche Unterscheidung von Bose- und Fermiteilchen ergibt tritt bei DHR-Darstellungen nur in mindestens 3 Dimensionen auf. Der niederdimensionale Fall, der zur *Zopfgruppenstatistik* führt, wird in Kap. III untersucht. Weiter wird in §7 eine Darstellung der Permutationsgruppe auf den Intertwinern zwischen n-fachen Produkten von Morphismen eingeführt und gezeigt, daß für Automorphismen der statistische Operator gleich $\pm\mathbb{1}$ ist.

Zur weiteren Untersuchung der Sektoren-Statistik benötigt man den in §8 eingeführten Begriff der *Linksinversen* eines Morphismus. Physikalisch gesehen bedeutet die Linksinverse eine Art *Ladungskonjugation*, die allerdings noch nicht auf einen konjugierten Sektor — also dem Äquivalent eines Antiteilchens — führt. Wendet man die Linksinverse ϕ eines irreduziblen Morphismus ρ auf dessen statistischen Operator ε_ρ an, so erhält man, wie in §9 gezeigt wird, einen eindeutig bestimmten und nur vom Sektor $[\rho]$ abhängigen Skalar λ_ρ — den *statistischen Parameter* des Sektors. Dieser hat immer die Form $\pm 1/d_\rho$, mit der *statistischen Dimension* d_ρ im Nenner. Diese Parameter klassifizieren die Permutationsgruppenstatistik eines Sektors eindeutig und man findet für $d_\rho > 1$ *Parastatistik* der Ordnung d_ρ vor.

Nach einem Exkurs über die Kovarianz von Morphsimen und Sektoren in §10, in dem unter anderem gezeigt wird, daß kovariante Darstellungen und kovariante Morphsimen sich eineindeutig entsprechen und daß Produkte kovarianter Morphismen wieder kovariant sind, werden in §11 *reduzible* Morphsimen untersucht. Wesentliches Ergebnis ist, daß sich alle interessanten Morphsimen in direkte Summen irreduzibler zerlegen lassen. Der Begriff der statistischen Dimension wird auf reduzible Morphismen verallgemeinert und es wird eine Summenregel für die Zerlegung der statistischen Diemnsion eines Produkts von Morphismen abgeleitet. Schließlich wird die Menge der physikalisch interessanten Morphismen dadurch näher eingegrenzt, daß sie abgeschlossen sein soll gegenüber direkten Summen, Produkten und Unterdarstellungen.

Die Tatsache, daß Intertwiner lokale Observablen sind, daß also im Prinzip Observablen zwischen verschiedenen Ladungszuständen vermitteln können zeigt die grundsätzliche Möglichkeit eine *Feldalgebra* aus den Observablen zu rekonstruieren. Die erste Idee dazu wird in §12 skizziert. Es werden einfach Paare aus Morphismen und Observablen gebildet und diese mit sinnvollen Verknüpfungen versehen. Das so gebildete *Feldbündel* bildet noch keine Feld*algebra* reichte aber, wie in [DHR74] nachzulesen ist, aus, um eine Streutheorie zu konstruieren.

Nachdem in §13 einige Erkenntnisse über das Energiespektrum der von kovarianten Morphismen induzierten Darstellungen aus [DHR74] referiert werden, wird in §14 das Thema von §8 wiederaufgegriffen. Es wird gezeigt, daß zu im wesentlichen allen interessanten Morphismen sogenannte *konjugierte* Morphismen existieren, d.h. zu ρ gibt es einen — bis auf Unitäräquivalenz — eindeutig bestimten Morphismus $\overline{\rho}$, so daß $[\overline{\rho}\rho]$ den Vakuumsektor genau einmal enthält. Wie man diese Ladungskonjugation im Feldbündel defniert wird schließlich in §15 gezeigt.

§6 Intertwiner

Intertwiner spielen in der algebraischen Quantentheorie eine herausragende Rolle. Sie sind *das* Hilfsmittel zur Manipulation nicht–disjunkter Darstellungen der Observablenalgebra. Intertwiner vermitteln zwischen den verschiedenen Unterdarstellungen einer gegebenen Darstellung π_ρ. Dabei ist π_ρ resp. der zugehörige Morphismus ρ im allgemeinen nicht irreduzibel, kann also mehrere Sektoren enthalten.

Definition 6.1 *Seien ρ_1, ρ_2 zwei (nicht notwendig lokalisierte) Morphismen von $\mathfrak{A}$ und die Darstellungen $\pi_0 \circ \rho_1$, $\pi_0 \circ \rho_2$ nicht disjunkt (siehe Def. A.13). Dann existiert ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)$, so daß*

$$\rho_2(A)T = T\rho_1(A)\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A} \tag{6.1}$$

gilt. T heißt dann **intertwining Operator** *von ρ_1 nach ρ_2. Man schreibt:*

$$\boldsymbol{T} \equiv (\rho_2|T|\rho_1)\,.$$

$\boldsymbol{T}$ *heißt* **Intertwiner** *von ρ_1 nach ρ_2. Schreibweise: $\boldsymbol{I}_\rho \equiv (\rho|\mathbb{1}|\rho)$.*

Ist $\boldsymbol{T}$ ein Intertwiner von ρ_1 nach ρ_2, so auch $\alpha\boldsymbol{T} \equiv (\rho_2|\alpha T|\rho_1)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Das heißt, die Intertwiner zwischen gegebenen Sektoren bilden im allgemeinen einen linearen Raum.

Definition 6.2 *Die Menge der intertwinig Operatoren von ρ_1 nach ρ_2 wird mit $(\rho_2|\rho_1)$ bezeichnet. Diese Menge heißt* **Intertwinerraum** *von ρ_1 nach ρ_2.*

Aus (6.1) folgt beispielsweise $(\rho|\rho) = \rho(\mathfrak{A})'$.

Definition 6.3 *Die Wirkung lokalisierter Morphismen auf den Intertwinern ist definiert durch*

$$\rho(\boldsymbol{T}) \equiv (\rho\rho_2|\rho(T)|\rho\rho_1)\,, \tag{6.2}$$

und $\rho((\rho_2|\rho_1))$ ist entsprechend definiert.

Das diese Setzungen korrekt sind, zeigt Punkt iii) der nächsten Bemerkung.

Bemerkung 6.4 *i) Ist $S\in(\rho_2|\rho_1)$ und $T\in(\rho_3|\rho_2)$, so ist $TS\in(\rho_3|\rho_1)$ und $S^*\in(\rho_1|\rho_2)$.*

ii) Sind ρ_1 und ρ_2 irreduzibel, so gilt

$$(\rho_2|\rho_1)=\begin{cases}\{0\}\ \textit{falls } \rho_1 \textit{ und } \rho_2 \textit{ unitär inäquivalent,}\\ \mathbb{C}\cdot U\ \textit{falls } \rho_1\,,\ \rho_2 \textit{ unitäräquivalent mit unitärem } U\,, \textit{ und}\\ \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}\ \textit{falls } \rho_1=\rho_2\,.\end{cases} \tag{6.3}$$

iii) $(\rho_2|\rho_1)\subset(\rho_2\rho_3|\rho_1\rho_3)$, und $\rho_3((\rho_2|\rho_1))\subset(\rho_3\rho_2|\rho_3\rho_1)$. Ist ρ_3 ein Automorphismus, so gilt sogar $(\rho_2|\rho_1)=(\rho_2\rho_3|\rho_1\rho_3)$.

iv) Ist $\rho\in\Delta_{\mathrm{irr}}$, ρ' beliebig, so ist jedes $T\in(\rho'|\rho)$ ein Vielfaches einer Isometrie.

Beweis: Die erste Aussage von i) ist klar. Betrachten wir das Skalarprodukt $\langle\Phi|\rho_2(A)S|\Psi\rangle=\langle\Phi|S\rho_1(A)|\Psi\rangle$, mit beliebigen $\Phi,\ \Psi\in\mathfrak{H}_0$, $A\in\mathfrak{A}$. Einerseits ist die linke Seite der Gleichung gleich $\langle S^*\rho_2(A^*)\Phi|\Psi\rangle$, andererseits die rechte gleich $\langle\rho_1(A^*)S^*\Phi|\Psi\rangle$. Die Aussage folgt, weil $\mathfrak{A}$ irreduzibel auf $\mathfrak{H}_0$ dargestellt ist. ii) folgt unmittelbar aus Schur's Lemma. Zu iii): Sei $T\in(\rho_2|\rho_1)$. Dann gilt $T\rho_1(\rho_3(A))=\rho_2(\rho_3(A))T$, $\forall A\in\mathfrak{A}$, und T ist offenbar auch intertwining Operator von $\rho_1\rho_3$ nach $\rho_2\rho_3$. Ist ρ_3 ein Automorphismus und $T\in(\rho_2\rho_3|\rho_1\rho_3)$ dann gilt wieder (6.1) (wähle $\rho_3^{-1}(A)$ statt A). Also ist T auch aus $(\rho_2|\rho_1)$. Außerdem ist $\rho_3(T)\rho_3(\rho_1(A))=\rho_3(T\rho_1(A))=\rho_3(\rho_2(A)T)=\rho_3(\rho_2(A))\rho_3(T)$, $\forall A\in\mathfrak{A}$, also $\rho_3(T)\in(\rho_3\rho_2|\rho_3\rho_1)$. iv) ist eine Folgerung aus der Borchers-Eigenschaft. ■

Zwischen den Intertwinern kann man wegen 6.4i) eine natürliche Verknüpfung definieren, wenn die zwischenliegenden Morphismen übereinstimmen:

Definition 6.5 *Seien $\boldsymbol{S}=(\rho_2|S|\rho_1)$, $\boldsymbol{T}=(\rho_3|T|\rho_2)$. Dann definieren wir:*

$$\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{S}\equiv(\rho_3|TS|\rho_1)\,. \tag{6.4}$$

Außerdem setzen wir $\boldsymbol{S}^*=(\rho_1|S^*|\rho_2)$.

Intertwiner zwischen Morphismen lassen sich auf natürliche Weise auch für direkte Summen und Unterdarstellungen definieren:

Bemerkung 6.6 *i) Sei $\rho\in\Delta$ und ρ_E eine Unterdarstellung mit dem Projektor $E=WW^*$, $W\in(\rho|\rho_E)$. Sei weiter $T\in(\rho|\rho')$. Dann definiert W^*T einen Intertwiner aus $(\rho_E|\rho')$.*

ii) Für ρ_1, ρ_2, $\rho\in\Delta$ gilt die Isomorphie

$$(\rho_1\oplus\rho_2|\rho)\cong(\rho_1|\rho)\oplus(\rho_2|\rho)\,. \tag{6.5}$$

Beweis: i) ist klar. Für ii) betrachte $W_i\in(\rho_1\oplus\rho_2|\rho_i)$, $W_iW_i^*=E_i$, $i=1,\,2$ und $T_i\in(\rho_i|\rho)$. dann definiert

$$W_1T_1+W_2T_2\,,$$

einen Intertwiner aus $(\rho_1\oplus\rho_2|\rho)$ und die Isomorphie ist offensichtlich, da die W_i Isometrien sind. ■

Eminent wichtig für alle Rechnungen, insbesondere bei Betrachtungen zur Zopfgruppenstatistik, aber auch von grundsätzlicher Bedeutung ist die graphische Darstellung der Intertwiner und ihrer Verknüpfungen. Ein $\boldsymbol{T}=(\rho_2|T|\rho_1)$ wird dabei durch einen gerichteten Graphen dargestellt. Die Wirkung von $\boldsymbol{T}$ läuft dabei von unten nach oben, d.h. das untere Ende

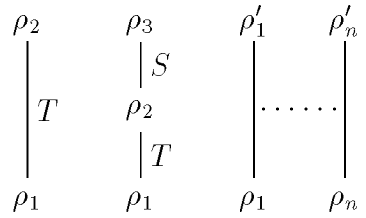


Fig. 6.1: Das Symbol für $(\rho_2|T|\rho_1)$, und für $(\rho_3|TS|\rho_1)$. Rechts ein Intertwiner aus $(\rho'_n\,\dots\,\rho'_1|\rho_n\,\dots\,\rho_1)$.

wird mit ρ_1 und das obere mit ρ_2 markiert. $\boldsymbol{T} = (\rho'_n\,\dots\,\rho'_1|T|\rho_n\,\dots\,\rho_1)$ wird dabei durch die rechte Figur in Fig.6.1 repräsentiert, wobei zu beachten ist, daß der zuerst angewandte Morphismus ρ_1 bzw. ρ'_1 dem äußerst links stehenden Faden angeheftet ist. Der intertwining Operator T wird dabei häufig weggelassen.

Betrachtet man die offensichtlichen Lokalitätseigenschaften von intertwining Operatoren, so stellt man fest, daß diese zur Observablenalgebra gehören.

Bemerkung 6.7 *Ist ρ_i lokalisiert in $\mathcal{O}_i$ für $i = 1, 2$ und $S \in (\rho_2|\rho_1)$, so ist $S \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O}$ ein beliebiger Doppelkegel ist, der $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ umfaßt. Insbesondere ist $S \in \{\, \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_1) \cap \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_2)\,\}'$.*

Beweis: Für $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_1) \cap \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_2)$ reduziert sich (6.1) auf $AS = SA$, d.h. $S \in \{\mathfrak{A}(\mathcal{O}'_1) \cap \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_2)\}'$. Aus der Haag-Dualität im Vakuumsektor folgt dann $S \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Ist $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_1) \cap \mathfrak{A}(\mathcal{O}'_2)$, so ist $A = \rho_1(A) = \rho_2(A)$ und deshalb $\rho_2(A)S = S\rho_1(A)$ äquivalent zu $AS = SA$. ■

Intertwiner bleiben also immer im Vakuumhilbertraum $\mathfrak{H}_0$, sie können aber natürlich, da sie nicht unitär sein müssen, zwischen verschiedenen Sektoren vermitteln.

Die wichtigere Verknüpfung zwischen Intertwinern spiegelt die multiplikative Struktur der durch lokalisierte Morphismen der Observablenalgebra induzierten Sektoren wieder. Mit Hilfe dieser Struktur lassen sich also Produkte von Feldoperatoren untersuchen, insbesondere Vertauschungsbeziehungen d.h. Statistik und Fusionsregeln.

Definition 6.8 *Seien $\boldsymbol{R}_i = (\rho'_i|R_i|\rho_i)$, $i = 1, 2$. Dann definiert*

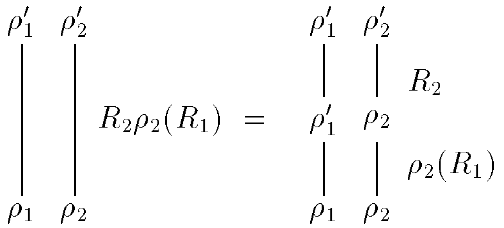
$$\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1 \equiv (\rho'_2\rho'_1|R_2\rho_2(R_1)|\rho_2\rho_1)\,, \tag{6.6}$$

einen Intertwiner von $\rho_2\rho_1$ nach $\rho'_2\rho'_1$.

$\times$ ist eine assoziative Verknüpfung, wie man leicht nachrechnet. Man sieht, daß $\rho_2(\boldsymbol{R}_1)$ wegen 6.4iii) ein Intertwiner aus $(\rho_2\rho'_1|\rho_2\rho_1)$ und weiter $\boldsymbol{R}_2$ auch einer aus $(\rho'_2\rho'_1|\rho_2\rho'_1)$ ist. Also:

$$\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2 \circ \rho_2(\boldsymbol{R}_1) = (\rho'_2\rho'_2|R_2|\rho_2\rho'_1) \circ (\rho_2\rho'_1|\rho_2(R_1)|\rho_2\rho_1) = (\rho'_2\rho'_1|R_2\rho_2(R_1)|\rho_2\rho_1)\,.$$

Graphisch stellt sich diese Definition so dar:



Betrachten wir nun zwei Paare von Intertwinern $\boldsymbol{R}_i = (\rho'_i|R_i|\rho_i)\,,\ \boldsymbol{R}'_i = (\rho''_i|R_i|\rho'_i)\,,\ i = 1,\,2$ und das Diagramm

$$\begin{array}{cc}
\rho''_1 & \rho''_2 \\
| & | \\
\rho'_1 & \rho'_2 \\
| & | \\
\rho_1 & \rho_2
\end{array}$$

Es ist offensichtlich gleichgültig, ob man dieses Diagramm von unten nach oben (d.h. zuerst das untere, dann das obere Rechteck), oder von links nach rechts zeichnet. Das impliziert eine Relation zwischen den zwei Verknüpfungen $\times$ und $\circ$, denn das Aneinanderfügen von Graphen von unten nach oben entspricht der Verknüpfung $\circ$, wogegen das Hinzufügen eines Fadens *rechts* von einem bereits bestehenden die Verknüpfung $\times$ repräsentiert. Hat man diese Relation geprüft, so hat man bewiesen, daß die Darstellung durch Fäden die Verknüpfungen von Intertwinern treu repräsentiert — die Graphiken erhalten damit Beweiskraft. Dies ist die erste Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma 6.9 *i) Seien* $\boldsymbol{R}_i = (\rho'_i|R_i|\rho_i)\,,\ \boldsymbol{R}'_i = (\rho''_i|R_i|\rho'_i)\,,\ i = 1,\,2\,.$ *Dann gilt*

$$(\boldsymbol{R}'_2 \circ \boldsymbol{R}_2) \times (\boldsymbol{R}'_1 \circ \boldsymbol{R}_1) = (\boldsymbol{R}'_2 \times \boldsymbol{R}'_1) \circ (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1)\,. \tag{6.7}$$

ii) Für beliebige Intertwiner gilt

$$(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T})^* = \boldsymbol{S}^* \times \boldsymbol{T}^*\,. \tag{6.8}$$

Beweis: Zu i):

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{R}'_2 \circ \boldsymbol{R}_2) \times (\boldsymbol{R}'_1 \circ \boldsymbol{R}_1) &= (\rho''_2\rho''_1|R'_2R_2\rho_2(R'_1R_1)|\rho_2\rho_1) = \\
&= (\rho''_2\rho''_1|\rho''_2(R'_1R_1)R'_2R_2|\rho_2\rho_1) = \\
&= (\rho''_2\rho''_1|\rho''_2(R'_1)R'_2\rho'_2(R_1)R_2|\rho_2\rho_1) = \\
&= (\rho''_2\rho''_1|R'_2\rho'_2(R'_1)R_2\rho_2(R_1)|\rho_2\rho_1) = (\boldsymbol{R}'_2 \times \boldsymbol{R}'_1) \circ (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1)\,.
\end{aligned}$$

ii) Seien $\boldsymbol{S} = (\sigma'|S|\sigma)\,, \boldsymbol{T} = (\tau'|T|\tau)\,.$ Dann wird

$$(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T})^* = (\sigma\tau|(S\sigma(T))^*|\sigma'\tau') = (\sigma\tau|\sigma(T^*)S^*|\sigma'\tau') = (\sigma\tau|S^*\sigma'(T^*)|\sigma'\tau') = \boldsymbol{S}^* \times \boldsymbol{T}^*\,.$$

■

§7 Statistik in $(d > 1) + 1$ Dimensionen I

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Vertauschungsbeziehungen von lokalisierten Morphismen respektive ihrer Sektoren. Wir werden dabei sehen, wie bei mehr als einer Raumdimension normale Permutationsgruppenstatistik auftritt und welche Komplikationen in 1 + 1-dimensionalen Räumen erscheinen. In letztgenanntem Fall stößt man automatisch auf Zopfgruppenstatistik — dies werden wir später, wenn uns das Instrumentarium des *Feldbündels* zur Verfügung steht, noch näher untersuchen.

Im folgenden werden Aussagen, die in voller Allgemeinheit gelten und somit später weiterverwendet werden können, buntgemischt mit solchen auftreten, die nur in $(d > 1) + 1$ Dimensionen gelten. Die allgemeingültigen Aussagen werden deshalb in diesem Paragraphen
$\rangle\rangle\rangle$ mit randständigen Markierungen wie nebenstehend versehen.

Man wundert sich zunächst, wie die Vertauschung von Morphismen überhaupt etwas über Teilchenstatistik aussagen kann, denn betrachtet man zwei raumartig gelegene Morphismen, so kommutieren diese ja immer. Um so schlimmer: ein Sektor, der eine Konfiguration von zwei identischen Teilchen beschreiben könnte, nämlich $\rho\rho$ weist scheinbar gar keine nichttriviale Vertauschungsrelation auf. In diesen Überlegungen stecken zwei Mißverständnisse: zum einen reicht ein lokalisierter Morphismus, wie wir später noch sehen werden nicht aus, um ein Element der Feldalgebra zu beschreiben (siehe §12), zum anderen ist damit, daß man weiß, daß die Identität in $(\rho\rho|\rho\rho)$ ist, die Struktur dieses Intertwinerraums noch nicht vollständig geklärt. Diese nichttriviale Struktur bildet gerade die Basis der Beschreibung von Statistik in unserem Formalismus, wie wir nun zeigen werden.

Wie konstruiert man nun einen nichttrivialen Intertwiner von $\rho\rho$ nach $\rho\rho$? Die einzige systematische Möglichkeit ist, die Morphismen, die ja transportabel sind, mit unitären Intertwinern zu verschieben, und zwar so, daß sie raumartig zueinander liegen. Dann kann man sie mit dem identischen Intertwiner vertauschen, da sie dann kommutieren, und mit den Inversen der Ladungstransferoperatoren an den Ausgangspunkt zurücktransportieren, wodurch man wieder bei $\rho\rho$ ankommt. Setzen wir dieses Programm nun um:

Sei $\rho \in \Delta$ und seien $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ zwei raumartig zueinander gelegene Doppelkegel. Seien weiter $U_i \in (\rho_i|\rho)$, $i = 1, 2$, wobei $\rho_i \in \Delta(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$. Wir intertwinern nun zunächst mit $\rho(U_1)$ von $\rho\rho$ nach $\rho\rho_1$, dann mit U_2 nach $\rho_2\rho_1$. Jetzt können wir diese Morphismen vertauschen, d.h. wir wenden $(\rho_1\rho_2|\mathbb{1}|\rho_2\rho_1)$ an. Nun müssen wir die vertauschten Morphismen nur noch mit $(\rho\rho|\rho(U_2^{-1})|\rho\rho_2) \circ (\rho\rho_2|U_1^{-1}|\rho_1\rho_2)$ zurücktransportieren. Der Intertwiner, der das alles leistet ist

$$(\rho\rho|\rho(U_2^{-1})U_1^{-1}U_2\rho(U_1)|\rho\rho)\,.$$

Daß wir zuerst $\rho(U_1)$ und nicht einfach U_1 oder U_2 angewandt haben, hat einen guten Grund: denn sonst müßten wir im zweiten Schritt z.B. $\rho_1(U_2)$ benutzen, und das wollen wir vermeiden, damit das Ergebnis von der speziellen Wahl der ρ_i möglichst unabhängig ist. Die ganze Konstruktion ist in Fig.7.1 veranschaulicht.

Damit der oben konstruierte Intertwiner einer Untersuchung Wert ist, sollte er im wesentlichen unabhängig von der Wahl der ρ_i sein. Das, und die wichtigsten Eigenschaften des *statistischen Operators* zeigt der folgende Satz.

Satz und Definition 7.1 *Seien ρ, ρ_i, U_i, $\mathcal{O}_i$ wie oben, dann heißt der unitäre Operator*

$$\varepsilon_\rho \equiv \rho(U_2^{-1})U_1^{-1}U_2\rho(U_1)\,, \tag{7.1}$$

statistischer Operator *des Sektors ρ. Er besitzt folgende Eigenschaften:*

$\rangle\rangle\rangle$ *i) ε_ρ hängt nur von ρ und nicht von der Wahl der Intertwiner U_i, bzw. der ρ_i ab, solange diese raumartig zueinander bleiben. Genauer gesagt darf man das Lokalisierungsgebiet beispielsweise von ρ_1 nur so verschieben, daß es ganz in einer Zusammenhangskomponente von $\mathcal{O}_2'$ bleibt, ohne ε_ρ zu verändern.*

$\rangle\rangle\rangle$ *ii) Sei W ein unitärer Intertwiner aus $(\rho'|\rho)$. Dann gilt*

$$\varepsilon_{\rho'} = \sigma_V \varepsilon_\rho\,, \quad \textit{mit} \quad V \equiv W\rho(W)\,. \tag{7.2}$$

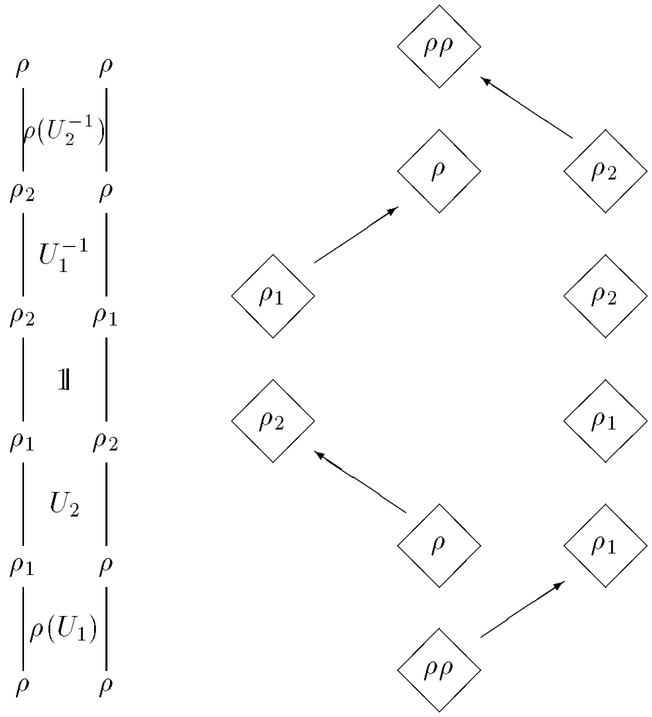


Fig. 7.1: Die Konstruktion des statistischen Operators.

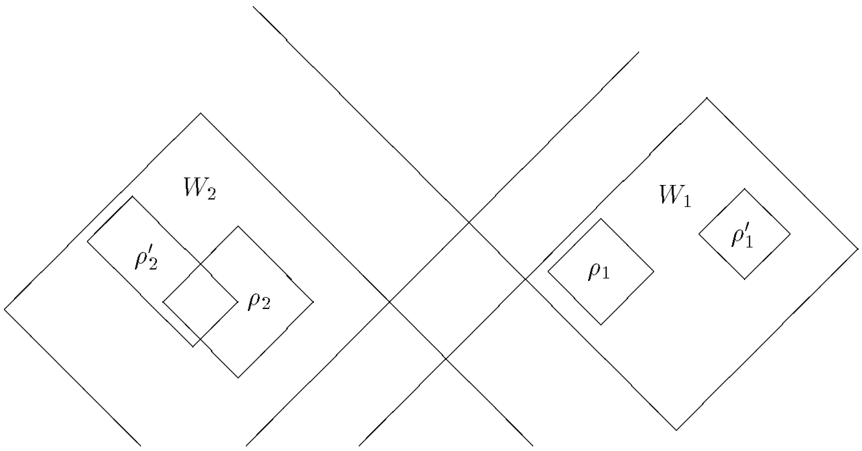
iii) ε_ρ *kommutiert mit allen Observablen aus der Darstellung* ρ^2 *, d.h.* $\langle\langle\langle$

$$\varepsilon_\rho \in \rho^2(\mathfrak{A})' . \tag{7.3}$$

iv) $\varepsilon_\rho^2 = \mathbb{1}$.

Am Beweis werden wir gleich merken, warum iv) nicht in $1+1$ Dimensionen gelten kann!

Beweis: iii) ist trivial, denn so wie wir ihn konstruiert haben, ist ε_ρ ein intertwining Operator aus $(\rho\rho|\rho\rho) = \rho^2(\mathfrak{A})'$. Um i) zu sehen berechnen wir die Änderung von ε_ρ bei einer hinreichend kleinen Änderung von ρ_i zu ρ_i' , vermittelt durch unitäre Intertwiner W_i . Mit hinreichend klein ist dabei gemeint, daß die Lokalisierungsgebiete von ρ_1 , ρ_1' , W_1 raumartig zu denen von ρ_2 , ρ_2' , W_2 liegen, etwa so:



(beachte dabei Bem.6.7). Also

$$\rho_i' = \sigma_{W_i}\rho_i = \sigma_{U_i'}\rho\,, \quad U_i' = W_iU_i\,, \quad i = 1\,,\ 2\,.$$

Es ist unter diesen Voraussetzungen

$$\rho_1(W_2) = W_2\,, \quad \rho_2(W_1) = W_1\,, \quad W_1W_2 = W_2W_1\,.$$

Ersetzt man in (7.1) U_i durch U_i', so erhält man

$$\varepsilon_\rho' = \rho(U_2^{-1})\rho(W_2^{-1})U_1^{-1}W_1^{-1}W_2U_2\rho(W_1)\rho(U_1)\,.$$

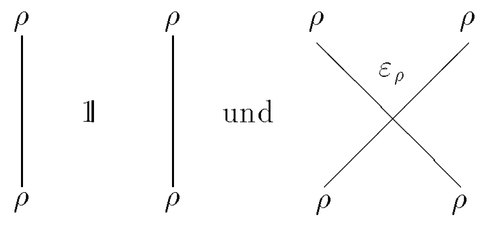
Nun ist $U_2 \in (\rho_2|\rho)$ und daher $U_2\rho(W_1) = \rho_2(W_1)U_2 = W_1U_2$ und ähnlich wird $\rho(W_2^{-1})U_1^{-1} = U_1^{-1}\rho_2(W_1^{-1}) = U_1^{-1}W_2^{-1}$. (Beachte, daß W_2^{-1} natürlich genauso lokalisiert ist, wie W_2). Also

$$\varepsilon_\rho' = \rho(U_2^{-1})U_1^{-1}W_2^{-1}W_1^{-1}W_2W_1U_2\rho(U_1) = \varepsilon_\rho\,.$$

Nun kann man in mehr als einer Raumdimension jedes Paar raumartig zueinander gelegener Doppelkegel durch kleine Bewegungen wie oben erreichen, und das beweist i). iv) folgt aus i) denn tauscht man ρ_1 gegen ρ_2 aus, so erhält man ε_ρ^{-1} statt ε_ρ, während man nach i) bei mehr als einer Raumdimension mit dem Doppelkegel $\mathcal{O}_1$ um den Kegel $\mathcal{O}_2$ herumwandern und dann durch eine Verschiebung beider Kegel die Vertauschung der Morphismen erreichen kann, ohne ε_ρ zu ändern (Man beachte dazu, daß die Lokalisierungsgebiete von ρ_1 und ρ_2 verschobene Kopien des Lokalisierungsgebietes von ρ sind). Also gilt $\varepsilon_\rho^{-1} = \varepsilon_\rho$, d.h. $\varepsilon_\rho^2 = 1\!\!1$. ii) wird aus Fig.7.1 klar: wenn man unten und oben noch $\rho'\rho'$ anfügt, und $W \in (\rho'|\rho)$ ist, dann muß man unten $\rho(W)^{-1}W^{-1}$ einsetzen, um zu $\rho\rho$ zu gelangen und oben mit $W\rho(W)$ nach $\rho'\rho'$ intertwinern. Insgesamt entsteht also $\varepsilon_{\rho'}$ aus ε_rho durch Adjunktion mit $V \equiv W\rho(W)$. ■

Man sieht hier genau, wo der Haken bei nur einer Raumdimension liegt: Das raumartige Komplement eines Doppelkegels besitzt zwei Zusammenhangskomponenten. Man erhält dann zwei verschiedene statistische Operatoren, je nachdem, ob ρ_1 rechts oder links von ρ_2 liegt. Das bedeutet, wie wir später (§16) sehen werden, das die Morphismen nicht permutiert, sondern gezopft werden — man trifft auf Zopfgruppenstatistik.

Die Unabhängigkeit von ε_ρ von der Lokalisierung der ρ_i zeigt, daß wir nun zwei prinizipiell unabhängige Operatoren aus $(\rho\rho|\rho\rho)$ kennen, nämlich



wobei wir für ε_ρ das nächstliegende Symbol gewählt haben. Das bedeutet, daß es von nun an verboten ist, in Intertwinergraphen mutwillig Überkreuzungen einzuführen, denn diese sind mit dem nichtgekreuzten Bild nicht identisch.

Jetzt können wir die Statistik von Sektoren analysieren. Besonders einfach ist das bei *Automorphismen*, die direkt zu *Bose-* und *Fermisektoren* führen. Das folgende Lemma gilt so nur in mehr als $1 + 1$ Dimensionen, aber wir werden später noch ein etwas schwächeres Analogon für zwei Dimensionen finden.

Lemma 7.2 *Sei $\rho \in \Delta$. Dann sind äquivalent:*

i) ρ ist ein Automorphismus.

ii) ρ^2 ist irreduzibel.

iii) $\varepsilon_\rho = \pm \mathbb{1}$.

Beweis: Aus i) folgt ii) trivialerweise, denn Automorphismen aus Δ sind auch irreduzibel, also insbesondere auch ρ^2 . iii) folgt aus ii) und Punkt iii) des vorangegangenen Lemmas, denn wenn ρ^2 irreduzibel ist, dann ist $\rho^2(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$ und deshalb $\varepsilon_\rho = \pm\mathbb{1}$ nach iv) des vorigen Lemmas. iii)$\Longrightarrow$i): Nimmt man $\rho_2 = \rho$, $U_2 = \mathbb{1}$ in der Definition von ε_ρ so ist $\varepsilon_\rho = U_1^{-1}\rho(U_1)$. Sei $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ und wähle ein $\rho_1 \in \Delta$, so daß sein Lokalisierungsgebiet raumartig zu denen von A und ρ liegt. Dann ist

$$A = \rho_1(A) = U_1\rho(A)U_1^* \,.$$

Ist $\varepsilon_\rho = \pm\mathbb{1}$, dann hat man mit obiger Wahl $U_1 = \pm\rho(U_1)$. Setzt man das ein, so wird $A = \rho(U_1AU_1^*) = \rho(B)$, mit $B \in \mathfrak{A}$. Also ist jede lokale Observable in der Menge $\rho(\mathfrak{A})$ enthalten, d.h. nach Definition von $\mathfrak{A}$ ist $\rho(\mathfrak{A})$ Norm-dicht in $\mathfrak{A}$. Nun ist ρ als C*-Morphismus normstetig und deshalb $\rho(\mathfrak{A})$ als Bild einer Norm-abgeschlossenen Menge unter einer solchen Abbildung ebenfalls Norm-abgeschlossen. Das bedeutet aber $\rho(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Damit ist gezeigt, daß ρ surjektiv ist. ρ ist aber auch injektiv, denn nach Bem.5.9 ist ρ eine Isometrie und daher $\|A - B\| \neq 0 \Longleftrightarrow \|\rho(A) - \rho(B)\| \neq 0$, $\forall A, B \in \mathfrak{A}$, d.h. ρ ist injektv. Also ist ρ ein Automorphismus. ■

Korollar 7.3 *Ist ρ ein Automorphismus, so ist ε_ρ konstant im Sektor $[\rho]$.*

Beweis: Das folgt unmittelbar aus dem Lemma und Satz 7.1ii). ■

Wir nennen einen Automorphismen-Sektor $[\rho]$, in dem $\varepsilon_\rho = +\mathbb{1}$ gilt, sinnigerweise **Bose-Sektor**, und für $\varepsilon_\rho = -\mathbb{1}$ **Fermi-Sektor**.

Ist ρ kein Automorphismus, so hängt der statistische Operator nicht unbedingt nur vom Sektor $[\rho]$ ab, sondern kann auch in ihm variieren. Wir werden uns später mit Hilfe sogenannter *Linksinversen* um charakteristische Größen von Sektoren bemühen, die Informationen über die Statistik kodieren.

Gehen wir nun daran, die obigen Ergebnisse zu verallgemeinern, um zu einer unitären Darstellung der Permutationsgruppe von n Elementen $\mathbb{P}^{(n)}$ auf Sektoren der Art $[\rho_1 \ldots \ldots \rho_n]$, genauer gesagt auf Intertwinern zwischen solchen Sektoren, zu gelangen.

Definition 7.4 *Zwei Intertwiner $(\rho_i'|R_i|\rho_i)$, $i = 1, 2$ heißen* **kausal disjunkt***, wenn die Lokalisierungsgebiete sowohl von ρ_1 und ρ_2 , wie auch von ρ_1' und ρ_2' raumartig zueinander liegen.*

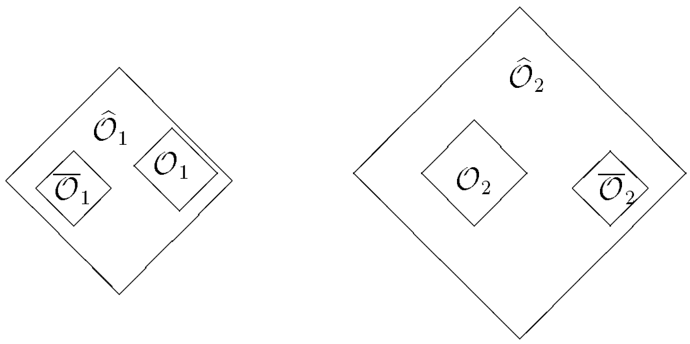
Lemma 7.5 *Sind $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ kausal disjunkte Intertwiner, so gilt*

$$\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1 \,.$$

Dies gilt nicht in $1+1$ Dimensionen!
Beweis: Seien $\boldsymbol{R}_i = (\rho_i'|R_i|\rho_i)$, $\rho_i \in \Delta(\mathcal{O}_i)$, $\rho_i' \in \Delta(\overline{\mathcal{O}}_i)$, $i = 1, 2$. Wir haben zu zeigen, daß

$$R_1\rho_1(R_2) = R_2\rho_2(R_1)\,, \tag{7.4}$$

gilt, was trivial ist, wenn es Doppelkegel $\hat{\mathcal{O}}_1$, $\hat{\mathcal{O}}_2$ gibt, so daß $\overline{\mathcal{O}}_i \subset \hat{\mathcal{O}}_i$, $\mathcal{O}_i \subset \hat{\mathcal{O}}_1$ und $\hat{\mathcal{O}}_1 \times \hat{\mathcal{O}}_2$ ist:



Nehmen wir nun an, daß (7.4) für gewisse Intertwiner $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ gilt. Das Lemma ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß wir von der oben dargestellten Konfiguration jede andere durch Verschiebung erreichen können, in der die verschobenen Intertwiner kausal disjunkt sind, ohne an der Kommutativität etwas zu ändern. Verschieben wir also zunächst $\mathcal{O}_2$ (das Lokalisierungsgebiet von ρ_2) so nach $\mathcal{O}_3$, daß der kleinste Doppelkegel, der $\mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$ umfaßt gänzlich raumartig zu $\mathcal{O}_1$, dem Lokalisierungsgebiet von ρ_2 liegt. Dann können wir die Verschiebung mit einem unitären Intertwiner $\boldsymbol{U} = (\rho_2|U|\rho_3)$ bewerkstelligen, wobei $U \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1')$ ist, d.h. $\rho_2(U) = U$. Dann ist $\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_2 \circ \boldsymbol{U}$. Man erhält dann mit (6.7)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_3 &= (\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2) \circ (\boldsymbol{I}_{\rho_1} \times \boldsymbol{U})\,, \\ \boldsymbol{R}_3 \times \boldsymbol{R}_1 &= (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1) \circ (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{I}_{\rho_1})\,. \end{aligned}$$

Nun gilt aber nach den Voraussetzungen über die Lokalisierung von U: $\boldsymbol{I}_{\rho_1} \times \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{I}_{\rho_1}$. Damit ändert diese Verschiebung nichts an der Kommutativität der Intertwiner. Und durch Hintereinanderausführung vieler kleiner Verschiebungen kann man jede Anordnung von $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ erreichen, wobei immer $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ gilt. Dieselbe Prozedur auf $\overline{\mathcal{O}}_1$ und $\overline{\mathcal{O}}_2$ anwendend, erreicht man so alle kausal disjunkten Intertwiner, die überhaupt aus $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ durch Verschiebung entstehen können. Dies schlägt in $1+1$ Dimensionen fehl, denn man muß ja zum Beispiel auch mit $\mathcal{O}_2$ um $\mathcal{O}_1$ herumwandern können, was unter den gegebenen Bedingungen bei nur einer Raumdimension unmöglich ist. ■

Definition 7.6 *Gegeben n Intertwiner $\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ und eine Permutation $p \in \mathbb{P}^{(n)}$ setzen wir*

$$\boldsymbol{R}(p) \equiv \boldsymbol{R}_{p^{-1}(1)} \times \boldsymbol{R}_{p^{-1}(2)} \times \ldots \times \boldsymbol{R}_{p^{-1}(n)}\,. \tag{7.5}$$

Theorem und Definition 7.7 *Seien $\rho_k \in \Delta$, $k = 1, \ldots, n$ und $p \in \mathbb{P}^{(n)}$. Wähle n Morphismen $\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_n$ mit wechselseitig raumartig gelegenen Lokalisierungsgebieten, die äquivalent sind zu $\rho_1, \ldots, \rho_n$, so daß unitäre Intertwiner $(\hat{\rho}_k|U_k|\rho_k)$ existieren. Dann setze*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p(\rho_1, \ldots, \rho_n) \equiv (\rho_{p^{-1}(1)} \ldots \rho_{p^{-1}(n)}|\varepsilon_p(\rho_1, \ldots, \rho_n)|\rho_1 \ldots \rho_n) \equiv \boldsymbol{U}^*(p) \circ \boldsymbol{U}(e)\,, \tag{7.6}$$

i) $\boldsymbol{\varepsilon}_p(\rho_1\,,\,\ldots\,,\,\rho_n)\in(\rho_{p^{-1}(1)}\ldots\rho_{p^{-1}(n)}|\rho_1\ldots\rho_n)$ *ist unabhängig von der Wahl der* $\widehat{\rho}_k$ *und* U_k *, wobei dieselben Einschränkungen gelten wie in Lemma 7.1.* $\langle\langle\langle$

ii) Haben die ρ_k *wechselweise raumartig zueinander gelegene Lokalisierungsgebiete, dann ist*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p(\rho_1\,,\,\ldots\,,\,\rho_n)=\boldsymbol{I}_{\rho_1\,\ldots\,\rho_n}\,.$$

iii) $\forall p,\,q\in\mathbb{P}^{(n)}$: $\langle\langle\langle$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_q(\rho_{p^{-1}(1)}\,,\,\ldots\,,\,\rho_{p^{-1}(n)})\circ\boldsymbol{\varepsilon}_p(\rho_1\,,\,\ldots\,,\,\rho_n)=\boldsymbol{\varepsilon}_{qp}(\rho_1\,,\,\ldots\,,\,\rho_n)\,. \tag{7.7}$$

iv) Bezeichnet $\tau_m\in\mathbb{P}^{(n)}$ *die Transposition der Elemente* m *und* $m+1$ *,* $m<n$ *, dann gilt* $\langle\langle\langle$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\tau_m}(\rho_1\,,\,\ldots\,,\,\rho_n)=\boldsymbol{I}_{\rho_1}\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{I}_{\rho_{m-1}}\times\varepsilon_{\tau_1}(\rho_m\,,\rho_{m+1})\times\boldsymbol{I}_{\rho_{m+2}}\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{I}_{\rho_n}\,. \tag{7.8}$$

Beweis: In (7.6) intertiwnert $\boldsymbol{U}(e)$ von $\rho_1\ldots\rho_n$ nach $\widehat{\rho}_1\ldots\widehat{\rho}_n$ und $\boldsymbol{U}^*(p)$ von $\widehat{\rho}_{p^{-1}(1)}\ldots\ldots\widehat{\rho}_{p^{-1}(n)}$ nach $\rho_{p^{-1}(1)}\ldots\rho_{p^{-1}(n)}$. Die $\widehat{\rho}_k$ sind alle raumartig zueinander lokalisiert und kommutieren somit; die linke Seite von (7.6) ist also wohldefiniert. Um die Unabhängigkeit von $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ von der Wahl der $\widehat{\rho}_k$ zu sehen, wählen wir statt der $\boldsymbol{U}_k$ Intertwiner $\widetilde{\boldsymbol{U}}_k=(\widetilde{\rho}_k|\widetilde{U}_k|\rho_k)$, so daß auch die $\widetilde{\rho}_k$ raumartig zueinander gelegen sind. Dann intertwinert $\boldsymbol{V}_k\equiv\widetilde{\boldsymbol{U}}_k\circ\boldsymbol{U}_k^*$ von $\widehat{\rho}_k$ nach $\widetilde{\rho}_k$. Die $\boldsymbol{V}_k$ sind dann kausal disjunkt und kommutieren nach Lemma 7.5, d.h. es gilt $\boldsymbol{V}(p)=\boldsymbol{V}(e)$. Man kann nun z.B. $\boldsymbol{V}(e)$ schreiben als

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_1\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{V}_n&=(\boldsymbol{V}_1\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{V}_n)\circ(\boldsymbol{U}_1\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{U}_n)\circ(\boldsymbol{U}_1^*\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{U}_n^*)=\\&=(\boldsymbol{V}_1\circ\boldsymbol{U}_1\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{V}_n\circ U_n)\circ(\boldsymbol{U}_1^*\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{U}_n^*)=\\&=(\widetilde{\boldsymbol{U}}_1\times\,\ldots\,\times\widetilde{\boldsymbol{U}}_n)\circ(\boldsymbol{U}_1^*\times\,\ldots\,\times\boldsymbol{U}_n^*)=\widetilde{\boldsymbol{U}}(e)\circ\boldsymbol{U}^*(e)\,,\end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt nur ein identischer Intertwiner angefügt und im zweiten mehrfach (6.7) angewandt wurde. Genauso ist $\boldsymbol{V}(p)=\widetilde{\boldsymbol{U}}(p)\circ\boldsymbol{U}^*(p)$, und somit gilt

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}(p)\circ\boldsymbol{U}^*(p)=\widetilde{\boldsymbol{U}}(e)\circ\boldsymbol{U}^*(e)\,,$$

oder

$$\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=\widetilde{\boldsymbol{U}}^*(p)\circ\widetilde{\boldsymbol{U}}(e)=\boldsymbol{U}^*(p)\circ\boldsymbol{U}(e)=\boldsymbol{\varepsilon}_p\,.$$

ii) folgt unmittelbar aus der Unabhängigkeit, denn wenn schon die ρ_k raumartig zueinander gelegene Lokalisierungsgebiete besitzen, können wir $\boldsymbol{U}_k=\boldsymbol{I}_{\rho_k}$ wählen. iii) und iv) folgen unmittelbar aus der Definition (7.6), wenn man bei iv) noch (6.7) benutzt. ∎

Bemerkung 7.8 *Als unmittelbare Folgerungen findet man*

i) $\varepsilon(\iota,\iota)=\mathbb{1}$. $\langle\langle\langle$

ii) $\varepsilon(\rho,\sigma)\varepsilon(\sigma,\rho)=\mathbb{1}$,

aus ii) resp. iii) des Theorems.

Die Intertwiner $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ können dazu verwandt werden, die Reihenfolge vo Intertwinern in beliebigen Produkten zu ändern:

Satz 7.9 *Sei* $\boldsymbol{R}_k = (\rho'_k|R_k|\rho_k)$, $k = 1, \ldots, n$, *und* $p \in \mathbb{P}^{(n)}$. *Dann gilt*

$$\boldsymbol{R}(p) \circ \boldsymbol{\varepsilon}(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \boldsymbol{\varepsilon}(\rho'_1, \ldots, \rho'_n) \circ \boldsymbol{R}(e). \tag{7.9}$$

Der Beweis dieser Formel funktioniert nicht direkt in $1+1$ Dimensionen, da wir von Lemma 7.5 Gebrauch machen. Wir finden aber später eine Entsprechung.
Beweis: Wähle unitäre Intertwiner $\boldsymbol{U}_k = (\widehat{\rho}_k|U_k|\rho_k)$, $\boldsymbol{U}'_k = (\widehat{\rho}'_k|U'_k|\rho'_k)$, $k = 1, \ldots, n$, so daß die Lokalisierungsgebiete sowohl der $\widehat{\rho}_k$ wie der $\widehat{\rho}'_k$ raumartig zueinander liegen. Definiere

$$\boldsymbol{S}_k \equiv \boldsymbol{U}'_k \circ \boldsymbol{R}_k \circ \boldsymbol{U}^*_k = (\widehat{\rho}'_k|U'_k R_k U^*_k|\widehat{\rho}_k), .$$

Die $\boldsymbol{S}_k$ sind nach Konstruktion alle kausal disjunkt und daher gilt in mehr als einer Raumdimension $\boldsymbol{S}(p) = \boldsymbol{S}(e)$. Einsetzen der Definition liefert

$$(\boldsymbol{U}' \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{U}^*)(p) = (\boldsymbol{U}' \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{U}^*)(e)$$

$$\overset{(6.7)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{U}'(p) \circ \boldsymbol{R}(p) \circ \boldsymbol{U}^*(p) = \boldsymbol{U}'(e) \circ \boldsymbol{R}(e) \circ \boldsymbol{U}^*(e)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boldsymbol{R}(p) \circ \underbrace{\boldsymbol{U}^*(p) \circ \boldsymbol{U}(e)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_p(\rho_1, \ldots, \rho_n)} = \underbrace{\boldsymbol{U}'^*(p) \circ \boldsymbol{U}'(e)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_p(\rho'_1, \ldots, \rho'_n)} \circ \boldsymbol{R}(e),$$

und das ist (7.9). ■

Für $n = 2$, $\rho_1 = \rho_2$ und $p = \tau$ (Transposition) reduzieren sich die obigen Aussagen auf Satz 7.1 und man identifiziert somit

$$\varepsilon_\tau(\rho, \rho) = \varepsilon_\rho. \tag{7.10}$$

Für $n > 2$ und $\rho_1 = \ldots = \rho_n$ findet man eine unitäre Darstellung der Permutationsgruppe! In Anlehnung an (7.10) schreiben wir

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}_\rho(p) \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_p(\rho, \ldots, \rho), \quad \forall p \in \mathbb{P}^{(n)}. \tag{7.11}$$

Nun finden wir:

⟩⟩⟩ **Korollar 7.10** *i)* $\mathbb{P}^{(n)} \ni p \mapsto \varepsilon^{(n)}_\rho(p) \in (\rho^n|\rho^n)$ *ist eine unitäre Darstellung der Permutationsgruppe.*

⟩⟩⟩ *ii)* $\varepsilon^{(n)}_\rho(p) \in \rho^n(\mathfrak{A})'$, $\forall p \in \mathbb{P}^{(n)}$.

⟩⟩⟩ *iii) Genau dann sind die Operatoren* $\varepsilon^{(n)}_\rho(p)$ *skalare Vielfache der Identität, wenn* ρ *ein Automorphismus ist.*

iv) Ist ρ *ein Automorphismus, so gilt*

$$\varepsilon^{(n)}_\rho(p) = \begin{cases} +\mathbb{1}, & \text{falls } [\rho] \text{ ein Bose-Sektor,} \\ \operatorname{sign}(p) \cdot \mathbb{1}, & \text{falls } [\rho] \text{ ein Fermi-Sektor ist;} \end{cases}$$

für alle $p \in \mathbb{P}^{(n)}$.

⟩⟩⟩ *v) Sei* $\boldsymbol{W} = (\rho'|W|\rho)$ *ein unitärer Intertwiner und bezeichne* $\boldsymbol{W}^{\times n}$ *das n-fache* $\times$*-Produkt von* $\boldsymbol{W}$ *mit sich selbst. Dann gilt*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}_{\rho'}(p) = \boldsymbol{W}^{\times n} \circ \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}_\rho(p) \circ (\boldsymbol{W}^{\times n})^*. \tag{7.12}$$

Beweis: i) ist eine Folgerung aus den Punkten i) und iii) von Theorem 7.7. ii) Ist klar aus der Definition von $\varepsilon_\rho^{(n)}(p)$ als intertwining Operator (vgl. Satz 7.1iii)). iii) folgt aus ii) und ist eine offensichtliche Verallgemeinerung von Lemma 7.2, ebenso wie iv). v) verallgemeinert Satz 7.1ii) und wird genauso gezeigt. ■

Um die Statistik der Sektoren weiter analysieren zu können, benötigen wir ein Hilfsmittel, dessen Existenz und dessen grundlegende Eigenschaften wir nun in einem Exkurs ableiten werden.

§8 Linksinverse und Ladungskonjugation I

Definition 8.1 *Sei ρ ein lokalisierter Morphismus von $\mathfrak{A}$. Eine normstetige, positive, lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \phi\,:\,\mathfrak{A} &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)\,, \\ A &\longmapsto \phi(A)\,. \end{aligned}$$

heißt **Linksinverse** *von ρ , wenn sie folgende Eigenschaften hat:*

$$\phi(\rho(A)B\rho(C)) = A\phi(B)C\,, \quad \forall A,\,B,\,C \in \mathfrak{A}\,, \tag{8.1i}$$

$$\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}\,. \tag{8.1ii}$$

Bemerkung 8.2 *Ist ρ ein in $\mathcal{O}$ lokalisierter Morphismus von $\mathfrak{A}$, ϕ eine Linksinverse von ρ, so gilt:*

i) $\phi(A) = A\,,\ \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')\,.$

ii) $\phi(\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ *falls* $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1\,.$

iii) ϕ ist eine Abbildung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$.

iv) $\phi(\,(\rho^n|\rho^n)\,) \subset (\rho^{n-1}|\rho^{n-1})\,,\ n \geq 1.$

v) $\phi(\rho(A)B) = A\phi(B)\,,\ \phi(A\rho(B)) = \phi(A)B\,,\ \forall A,\,B \in \mathfrak{A}.$

Beweis: i): für solche A ist $\phi(A) = \phi(\rho(A)) = A$. ii): Sei $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)\,,\ B \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1')$. Dann ist mit i) $B\phi(A) = \phi(BA) = \phi(AB) = \phi(A)B$, d.h. $\phi(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$. iii) folgt aus i) und ii) und der Normstetigkeit von ϕ. Wendet man auf die Intertwinerdefinition ϕ an, so folgt iv). v) ist klar, wenn man in (8.1i) einen der äußeren Faktoren $\mathbb{1}$ setzt. ■

Man beachte, das Linksinverse keine Morphismen sind, denn die Morphismuseigenschaft $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ gilt nur, wenn wenigstens einer der Faktoren aus $\rho(\mathfrak{A})$ ist und das ist nur bei Automorphismen trivial, in welchem Fall sich aber ϕ auch auf ρ^{-1} reduziert.

Nun zur Konstruktion von Linksinversen für kovariante Morphismen: Als erstes zeigen wir, daß alle $\rho \in \Delta$ als Grenzwerte von Folgen innerer Automorphismen von $\mathfrak{A}$ dargestellt werden können.

Lemma 8.3 *Sei $\rho \in \Delta$ und $(\mathcal{O}_k)$ eine Folge von Doppelkegeln, die nach raumartig Unendlich streben in dem Sinne, daß die $\mathcal{O}_k$ für hinreichend große k raumartig zu jedem gegebenen*

Doppelkegel liegen. Seien weiter $\rho_k \in \Delta(\mathcal{O}_k)$ zu ρ äquivalente Morphismen, U_k unitäre Operatoren, die die Äquivalenz vermitteln. Dann gilt:

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \sigma_{U_k^*}(A) = \lim_{k\to\infty} U_k^* A U_k\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{8.2}$$

Die Konvergenz ist dabei in der uniformen Topologie zu verstehen.

Beweis: Nach den Voraussetzungen über die ρ_k kann man die unitäre Operatoren so wählen, daß $U_k \in \{\mathfrak{A}(\mathcal{O}_k') \cap \mathfrak{A}(\mathcal{O}')\}'$ ist (nach Bem.6.7, denn $U_k \in (\rho_k|\rho)$). Dann ist

$$\rho_k(A) = \sigma_{U_k}\rho(A) = U_k \rho(A) U_k^{-1}\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Sei nun $\rho(A)$ in irgendeinem $\mathcal{O}_1$ lokalisiert, dann gilt für hinreichend großes k: $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_k') \cap \mathfrak{A}(\mathcal{O}') \supset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ und deshalb $\rho_k(A) = \rho(A)$, d.h. $\lim_{k\to\infty} \|\rho_k(A) - \rho(A)\| = 0$. ■

Das physikalische Bild ist das folgende: U_k transportiert die Ladung des Sektors $[\rho]$, die in $\mathcal{O}$ lokalisiert ist, nach $\mathcal{O}_k$, wobei wir aber im selben Sektor bleiben. Wir nennen daher U_k und ganz allgemein jeden unitären Operator, der die Lokalisation einer superselection-Ladung ändert, **Ladungstransferoperator**. Im Sinne des Lemmas haben wir also die Entstehung einer Ladung in $\mathcal{O}$ durch den Herbeitransport von Ladung aus weit entfernten Regionen simuliert. Das legt nahe, diesen Vorgang umzukehren und durch Abtransport der Ladung aus $\mathcal{O}$ einen **ladungskonjugierten Sektor** $[\overline{\rho}]$ zu erreichen, der in dem Sinne zu $[\rho]$ konjugiert ist, daß $[\overline{\rho}\rho]$ in geeigneter Weise dem Vakuumsektor ähnelt. Ist ρ ein Automorphismus, dann wird die inverse Folge σ_{U_k} uniform gegen ρ^{-1} konvergieren, sonst ist aber nicht klar, in welchem Sinne diese Folge überhaupt konvergiert. Tatsächlich können wir aber zeigen, daß wir auf diese Weise immer eine Linksinverse zu ρ erhalten.

Als technische Voraussetzung benötigen wir

Definition 8.4 *Bezeichne $\mathcal{M}$ den Raum der beschränkten, linearen Abbildungen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)$, $\mathcal{M}_1$ die Einheitskugel von $\mathcal{M}$, d.h. die Menge*

$$\mathcal{M}_1 \equiv \left\{ \phi \in \mathcal{M} \;\middle|\; \|\phi\| \equiv \sup \frac{\|\phi(A)\|}{\|A\|} \leq 1 \right\}.$$

$\mathcal{M}$ trage die von den Halbnormen

$$\mathcal{M} \ni \phi \longmapsto \langle \Phi | \phi(A) \Psi \rangle\,, \quad A \in \mathfrak{A}\,,\ \Phi,\ \Psi \in \mathfrak{H}_0\,,$$

erzeugte Topologie (d.h. die Topologie, in der $A \mapsto \phi(A)$ punktweise (d.h. an jedem Punkt $A \in \mathfrak{A}$) schwach stetig ist).

Aus einer geringfügigen Modifikation des Banach-Alaoglu-Theorems A.16 folgt, daß $\mathcal{M}_1$ kompakt ist in dieser Topologie.

Jetzt können wir die Existenz von Linksinversen zeigen:

Lemma 8.5 *Seien ρ, ρ_k, U_k wie im vorigen Lemma. Dann besitzt die Folge σ_{U_k} mindestens einen Häufungspunkt in $\mathcal{M}_1$ und jeder solche Häufungspunkt ist eine Linksinverse von ρ.*

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus $\sigma_{U_k} \in \mathcal{M}_1$ und der Kompaktheit von $\mathcal{M}_1$. Nach Lemma 8.3 konvergiert die Folge $\sigma_{U_k}\rho(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$ gegen A in der Normtopologie, d.h.

$$\|U_k\rho(A)U_k^* - A\| \longrightarrow 0 \,.$$

Dann gilt aber auch

$$\|U_k\rho(A)U_k^* U_k B U_k^* U_k \rho(C) U_k^* - A U_k B U_k^* C\| \longrightarrow 0 \,,$$

oder

$$\|U_k\rho(A)B\rho(C)U_k^* - AU_kBU_k^*C\| \longrightarrow 0 \,.$$

Wählt man eine konvergente Teilfolge aus und benennt ihren Limes mit ϕ, so erhält man die erste Eigenschaft aus Def.8.1 einer Linksinversen. $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ ist trivial. ϕ ist positiv, denn jedes σ_{U_k} bildet positive Operatoren in positive ab und der schwache Limes einer Folge positiver Operatoren ist wieder ein positiver Operator. Die Aussage folgt, weil ϕ an jedem Punkt $A \in \mathfrak{A}$ ein Grenzwert im schwachen Sinne ist. ■

Lemma 8.6 *Die Menge der Linksinversen zu gegebenem $\rho \in \Delta$ ist eine nichtleere, kompakte, konvexe Untermenge des lokalkonvexen Raumes $\mathcal{M}$.*

Beweis: Da die Voraussetzungen von Lemma 8.3 für $\rho \in \Delta$ erfüllt sind, folgt die Existenz einer Linksinversen für solche ρ. Wir haben zu zeigen, daß die definierenden Eigenschaften der Linksinversen unter konvexen Kombinationen und Grenzwertbildung stabil sind. Zunächst ist bei konvexen Kombinationen klar, daß die Positivität und $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ erhalten bleiben. Sei $\widehat{\phi} = \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2$ eine solche Konvexkombination. Dann wird

$$\widehat{\phi}(\rho(A)B\rho(C)) = \lambda A\phi_1(B)C + (1-\lambda)A\phi_2(B)C = A\widehat{\phi}(B)C \,,$$

wie gewünscht. Daß diese Eigenschaften auch unter Grenzwertbildungen im Sinne der oben auf $\mathcal{M}$ eingeführten Topologie erhalten bleiben, überlegt man sich leicht. ■

Da eine Linksinverse ϕ eine positive lineare Abbildung ist, stellt $\omega_0 \circ \phi$ einen Zustand auf $\mathfrak{A}$ dar, zu dem man per GNS-Konstruktion eine Darstellung π_ϕ bauen kann. Sehen wir nun, ob $\pi_\phi \circ \rho$ etwas mit der Vakuumdarstellung zu tun hat, wie wir gemutmaßt hatten.

Satz 8.7 *Sei ϕ eine Linksinverse von $\rho \in \Delta$. Die GNS-Darstellung zum Zustand $\omega_0 \circ \phi$ auf $\mathfrak{A}$ (ω_0 ist der Vakuumzustand, der $\mathfrak{H}_0$ erzeugt) werde mit π_ϕ, der zyklische Vektor dieser Darstellung mit ξ und der Darstellungsraum mit $\mathfrak{H}_\phi$ bezeichnet. Es existiert ein isometrischer Operator $V : \mathfrak{H}_0 \to \mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_\phi$, so daß für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt:*

$$V\Omega = \xi \,, \tag{8.3i}$$

$$\pi_\phi(\rho(A))V = VA \,, \tag{8.3ii}$$

$$V^*\pi_\phi(A)V = \phi(A) \,, \tag{8.3iii}$$

das heißt, die Darstellung $\pi_\phi \circ \rho$ enthält eine Unterdarstellung (diejenige auf $\mathfrak{H}_1$), die äquivalent ist zur Vakuumdarstellung π_0 und die Matrixelemente von $\pi_\phi(A)$ im Unterraum $\mathfrak{H}_1$ stimmen mit den korrespondierenden Matrixelementen von $\phi(A)$ in $\mathfrak{H}_0$ überein.

Beweis: Schränkt man die GNS-Konstruktion auf $\rho(\mathfrak{A})$ ein, so erhält man einen Unterraum $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_\phi$, in dem die Menge von Vektoren $\pi_\phi(\rho(\mathfrak{A}))\xi$ dicht liegen. Die Abbildung V ist dann explizit gegeben durch

$$V\,:\,A\Omega \longmapsto \pi_\phi(\rho(A))\xi\,, \tag{8.4}$$

(Ist insbesondere ρ ein Automorphismus, so wird $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_\phi \cong \mathfrak{H}_0$ und V vermittelt die Isomorphie). Diese Abbildung erfüllt trivialerweise (8.3i). Sie ist isometrisch, denn

$$\|\pi_\phi(\rho(A))\xi\|^2 = \langle\xi|\pi_\phi(\rho(A^*A))\xi\rangle_{\mathfrak{H}_\phi} = \omega_0(\phi(\rho(A^*A))) = \omega_0(A^*A) = \|A\Omega\|^2\,,$$

wobei $\langle\,.\,|\,.\,\rangle_{\mathfrak{H}_\phi}$ das durch die GNS-Konstruktion in $\mathfrak{H}_\phi$ induzierte Skalarprodukt bezeichnet, und bildet $\mathfrak{H}_0$ auf $\mathfrak{H}_1$ ab. (8.3ii) folgt ebenfalls aus (8.4), denn

$$VA\Omega = \pi_\phi(\rho(A))\xi = \pi_\phi(\rho(A))V\Omega\,.$$

Damit haben wir die Äquivalenz von $\pi_\phi \circ \rho|_{\mathfrak{H}_1}$ zu π_0, denn auf $\mathfrak{H}_1$ ist V eindeutig umkehrbar, d.h. unitär. Um (8.3iii) zu zeigen, rechnen wir das Matrixelement der linken Seite zwischen Vektoren aus $\mathfrak{H}_0$ mit (8.4) und $B\Omega$, $C\Omega \in \mathfrak{H}_0$ aus:

$$\begin{aligned}\langle C\Omega|V^*\pi_\phi(A)VB\Omega\rangle &\overset{(8.3\text{ii})}{=} \langle\pi_\phi(\rho(C))\xi|\pi_\phi(A)\pi_\phi(\rho(B))\xi\rangle_{\mathfrak{H}_\phi} = \\ &= \omega_0\left(\phi\left(\rho(C^*)A\rho(B)\right)\right) = \omega_0\left(C^*\phi(A)B\right) = \\ &= \langle C\Omega|\phi(A)B\Omega\rangle\,.\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $A,\ B,\ C \in \mathfrak{A}$ und damit ist (8.3iii) bewiesen. ■

Korollar 8.8 *Ist ϕ eine beliebige Linksinverse, so gilt*

$$\phi(A^*A) \geq \phi(A^*)\phi(A)\,, \tag{8.5}$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Beweis: Bezeichne $E_1 \equiv VV^*$ die Projektion auf $\mathfrak{H}_1$ aus Satz 8.7. Dann erhält man mit (8.3iii)

$$\phi(A^*A) = V^*\pi_\phi(A^*)\pi_\phi(A)V \geq V^*\pi_\phi(A^*)E_1\pi_\phi(A)V = \phi(A^*)\phi(A)\,.$$

■

Die Darstellungen π_ϕ und ρ können also als ladungskonjugiert zueinander angesehen werden in dem Sinne, daß die Zusammensetzung $\pi_\phi \circ \rho$ zu einer Darstellung führt, die den Vakuumsektor enthält.

Wir werden das Thema Ladungskonjugation später noch vertiefen. Zunächst aber zurück zur Permutationsgruppenstatistik.

§9 Statistik in $(d > 1) + 1$ Dimensionen II

Linksinverse erlauben uns nun die Klassifikation der Statistik eines Sektors. Beginnen wir mit dem einfacheren Fall irreduzibler Morphismen und sehen zunächst, was uns ϕ über den Sektor $[\rho]$ sagen kann.

Satz und Definition 9.1 *Sei $\rho\in\Delta_{\rm irr}$, ε_ρ der zu ρ gehörige statistische Operator und ϕ eine Linksinverse von ρ. Dann gilt:* ⟨⟨⟨

$$\phi(\varepsilon_\rho) = \lambda_\rho \cdot \mathbb{1}\,. \tag{9.1}$$

λ_ρ heißt **statistischer Parameter** *von ρ.*

Dies gilt allerdings und glücklicherweise auch in $1+1$ Dimensionen, denn im Beweis machen wir nur von der Eigenschaft von ε_ρ, ein intertwining Operator aus $(\rho^2|\rho^2)$ zu sein und der Irreduzibilität von ρ Gebrauch.
Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus Bem.8.2iv) und der Irreduzibilität von ρ. ■

Ein triviales Beispiel für die Bedeutung des statistischen Parameters ist gegeben, wenn ρ ein Automorphismus, d.h. $[\rho]$ ein Bose- oder Fermisektor ist, denn dann ist einfach $\lambda_\rho = \pm 1$. Wir bleiben aber der Bequemlichkeit halber bei der Schreibweise λ_ρ statt $\lambda_{[\rho]}$ und lassen weiterhin die Sektoren durch einzelne Morphismen repräsentieren.

Wir führen noch folgende Sprechweise ein: Man sagt $\rho\in\Delta_{\rm irr}$ besitze **finite Statistik** (bzw. **infinite Statistik**), wenn $\lambda_\rho\neq 0$ (bzw. $\lambda_\rho = 0$) gilt.

Lemma 9.2 *Sei ϕ eine Linksinverse von $\rho\in\Delta$ mit $\phi(\varepsilon_\rho) = \lambda_\rho\mathbb{1}$. Dann gilt für $p\in\mathbb{P}^{(n)}$:*

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon_\rho^{(n)}(p)) &= \varepsilon_\rho^{(n-1)}(p') && \text{für } \; p(1) = 1\,,\\ \phi(\varepsilon_\rho^{(n)}(p)) &= \lambda_\rho\varepsilon_\rho^{(n-1)}(p') && \text{für } \; p(1)\neq 1\,. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Wobei $p'\in\mathbb{P}^{(n-1)}$ die Permutation ist, die aus p entsteht, wenn man das Element 1 aus allen Zykeln der Zerlegung von p in disjunkte Zykeln entfernt und für alle übrigen Elemente $t = 2,\ \ldots, n$ $t-1$ schreibt.

Beweis: Zunächst ist klar, daß, wenn p das erste Element gar nicht involviert, man die Permutation p durch p' ersetzen kann, ohne etwas zu ändern: $\varepsilon_\rho^{(n)}(p) = \boldsymbol{I}_\rho\times\varepsilon_\rho^{(n-1)}(p') = \rho(\varepsilon_\rho^{(n-1)}(p'))$, woraus der erste Fall unmittelbar folgt. Andererseits kann man eine Permutation p mit $p(1)\neq 1$ immer zerlegen in $p = p_1\tau p_2$ mit $\tau = (12)$, $p_1 = (2p(1))$, wobei (st) die Transposition der Elemente s und t bezeichnet. Dann ist offenbar $p_1(1) = 1 = p_2(1)$ und man erhält mit Korollar 7.10 und (8.1i)

$$\phi(\varepsilon_\rho^{(n)}(p)) = \varepsilon_\rho^{(n-1)}(p_1')\phi(\varepsilon_\rho)\varepsilon_\rho^{(n-1)}(p_3') = \lambda_\rho\varepsilon_\rho^{(n-1)}(p_1'p_3')\,.$$

Die Behauptung folgt, da $p' = p_1'p_3'$. ■

Jetzt können wir $\phi^n(\varepsilon_\rho^{(n)}(p))$ ausrechnen. Wir bemerken zunächst, daß $\phi^n(\varepsilon_\rho^{(n)}(p)\in\mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$, wie aus wiederholter Anwendung obigen Lemmas folgt. Deshalb können wir definieren:

Satz und Definition 9.3 *Die Setzung*

$$\omega_n^{\lambda_\rho}(a)\cdot\mathbb{1}\equiv\phi^n(\varepsilon_\rho^{(n)}(a))\,,\quad \forall a\in C^*(\mathbb{P}^{(n)})\,, \tag{9.3}$$

definiert einen Zustand auf der Gruppenalgebra $C^*(\mathbb{P}^{(n)})$ (durch lineare Fortsetzung). Es gilt

$$\omega_n^{\lambda_\rho}(p) = \prod_{j=1}^{m(p)}\lambda_\rho^{k_j-1}\,,\quad \forall p\in\mathbb{P}^{(n)} \tag{9.4}$$

wenn p eine Permutation mit $m(p)$ Zykeln der Länge $k_1,\ \ldots, k_{m(p)}$ ist.

Beweis: Daß $\omega_n^{\lambda_\rho}$ ein Zustand ist folgt aus der Positivität von ϕ und $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Der Rest folgt durch Anwendung des letzten Lemmas auf die Zerlegung von p in disjunkte Zykeln. ■

Im Fall $\lambda_\rho = 0$ hat man

$$\omega_n^{\lambda_\rho}(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = \mathrm{id}\,, \\ 0 & \text{falls } p \neq \mathrm{id}\,. \end{cases}$$

Und daher für $a = \sum_p c_p p \in C^*(\mathbb{P}^{(n)})$ $\omega_n^{\lambda_\rho}(a) = c_{\mathrm{id}}$. Daß heißt, in diesem Fall ist $\omega_n^{\lambda_\rho}$ ein treuer Zustand, denn aus $\omega_n^{\lambda_\rho}(a^*a) = 0$ folgt $a = 0$. Sei jetzt D eine Darstellung aus dem *Spektrum* von $\mathbb{P}^{(n)}$, d.i. die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $\mathbb{P}^{(n)}$, e_D sei die zugehörige zentrale Projektion in $C^*(\mathbb{P}^{(n)})$. Dann ist sicher $\omega_n^{\lambda_\rho}(e_D) \neq 0$ und damit auch die zugehörige zentrale Projektion in der Darstellung $\varepsilon_\rho^{(n)}$ $E_D \equiv \varepsilon_\rho^{(n)}(e_D)$ ungleich null. Das bedeutet, in der Zerlegung der Darstellung $\varepsilon_\rho^{(n)}$ tritt jede Darstellung aus dem Spektrum von $\mathbb{P}^{(n)}$ auf. Das ist ein wichtiges Ergebnis, denn es zeigt, daß eine Untersuchung von $\varepsilon_\rho^{(n)}$ die Statistik des Sektors $[\rho^n]$ vollständig erfaßt. Ebendies gilt auch im Fall $\lambda_\rho \neq 0$, denn aus $\varepsilon_\rho^{(n)}(e_D) = 0$ folgt trivial $\omega_n^{\lambda_\rho}(e_D) = 0$. Die Umkehrung gilt aber auch, denn dann ist ϕ treu, wenn man.

Damit haben wir gezeigt, daß λ_ρ die Statistik des Sektors $[\rho]$ determiniert. Berechnen wir nun λ_ρ!

Wir führen die total symmetrischen, bzw. antisymmetrischen Projektoren aus $C^*(\mathbb{P}^{(n)})$ ein:

$$s_n \equiv \frac{1}{n!}\sum_p p\,, \quad a_n \equiv \frac{1}{n!}\sum_p \mathrm{sgn}(p)p\,.$$

Satz 9.4 *i) Es gilt:*

$$\begin{aligned} \omega_n^{\lambda_\rho}(s_n) &= \frac{1}{n!}\,(1+\lambda_\rho)(1+2\lambda_\rho)\,\ldots(1+(n-1)\lambda_\rho)\,, \\ \omega_n^{\lambda_\rho}(a_n) &= \frac{1}{n!}\,(1-\lambda_\rho)(1-2\lambda_\rho)\,\ldots(1-(n-1)\lambda_\rho)\,. \end{aligned} \tag{9.5}$$

ii) Die möglichen Werte von λ_ρ sind 0 und $\pm\frac{1}{d}$ mit $d \in \mathbb{N}$. d ist bei gegebener Linksinverse eine Invariante des Sektors $[\rho]$.

Beweis: i): Zunächst zum symmetrischen Projektor. Die Summe über alle Permutationen läßt sich wiefolgt aufteilen: $(n-1)!$ Summanden in denen $p(1) = 1$ gilt plus die $n! - (n-1)! = (n-1)(n-1)!$ restlichen Summanden. Wendet man $\omega_n^{\lambda_\rho}$ auf die Teilsummen an, so erhält man mit Lemma 9.2

$$\omega_n^{\lambda_\rho}(s_n) = \frac{1}{n}\omega_{n-1}^{\lambda_\rho}(s_{n-1}) + \frac{n-1}{n}\lambda_\rho\omega_{n-1}^{\lambda_\rho}(s_{n-1})\,.$$

Beachtet man, daß sich das Vorzeichen einer Permutation ändert, wenn ein Element aus einem Zykelmit Länge > 1 entfernt, so folgt für den antisymmetrischen Projektor

$$\omega_n^{\lambda_\rho}(a_n) = \frac{1}{n}\omega_{n-1}^{\lambda_\rho}(a_{n-1}) - \frac{n-1}{n}\lambda_\rho\omega_{n-1}^{\lambda_\rho}(a_{n-1})\,.$$

Die Formeln (9.5) folgen durch Induktion, wie wir exemplarisch für $\omega_n^{\lambda_\rho}(s_n)$ zeigen wollen. Für $n = 2$ ist zunächst

$$\omega_2^{\lambda_\rho}(s_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_\rho = \frac{1}{2}(1+\lambda_\rho)\,.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\omega_{n+1}^{\lambda_\rho}(s_{n+1}) &= \frac{1}{n+1}\omega_n^{\lambda_\rho}(s_n) + \frac{n}{n+1}\lambda_\rho\omega_n^{\lambda_\rho}(s_n) = \\ &= \frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{n!}(1+\lambda_\rho)\ldots(1+(n-1)\lambda_\rho) + \frac{1}{n!}\lambda_\rho(1+\lambda_\rho)\ldots(1+(n-1)\lambda_\rho)\Big) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}(1+\lambda_\rho)\ldots(1+n\lambda_\rho)\,.\end{aligned}$$

Zu ii): Als Zustand auf $C^*(\mathbb{P}^{(n)})$ darf $\omega_n^{\lambda_\rho}$ auf s_n, a_n nicht negativ werden, d.h. die Produkte in (9.5) müssen für hinreichend großes n einen Faktor enthalten, der null ist. Also muß $(1 \pm d\lambda_\rho) = 0$ sein für ein $d \in \mathbb{N}$, d.h. $\lambda_\rho = \pm d^{-1}$, $d \in \mathbb{N}$. ■

$d_\rho \equiv d$ heißt **statistische Dimension** des Sektors $[\rho]$.

Wie in §7 versprochen ergibt sich als Korollar aus dem, was wir bis jetzt wissen:

Korollar 9.5 *Sei $\rho \in \Delta_{\text{irr}}$. Der statistische Parameter λ_ρ ist konstant im Sektor $[\rho]$.*

Beweis: Gäbe es zunächst zwei Linksinverse ϕ_1, ϕ_2 von ρ, die zu verschiedenen statistischen Parametern λ_1, λ_2 führen, dann müßten nach Lemma 8.6 auch alle konvexen Kombinationen von λ_1, λ_2 als Werte des statistischen Parameters auftreten, was nach Satz 9.4 unmöglich ist. Weiter haben wir zu zeigen, daß für $\rho' \cong \rho$ $\lambda_{\rho'} = \lambda_\rho$ ist. Nun ist nach Satz 7.1ii) $\varepsilon_{\rho'} = W\rho(W)\varepsilon_\rho\rho(W^{-1})W^{-1}$, wenn $\rho' = \sigma_W\rho$ gilt. Dann ist $\phi' = \phi \circ \sigma_{W^*}$ eine Linksinverse von ρ' und wir rechnen:

$$\lambda_{\rho'} = \phi'(\varepsilon_{\rho'}) = \phi(W^{-1}W\rho(W)\varepsilon_\rho\rho(W^{-1})W^{-1}) = \phi(\rho(W)\varepsilon_\rho\rho(W^{-1})) = \lambda_\rho WW^{-1} = \lambda_\rho\,.$$

■

Auf die physikalischen Implikationen, die aus diesen Ergebnissen folgen, kann hier aus Platzgründen nicht näher eingegangen werden. Es sei nur erwähnt, daß λ_ρ die Statistik so klassifiziert:

- Für $\lambda_\rho = +d^{-1}$ findet man **para-Bose-Statistik der Ordnung** d, d.h. es treten alle Young-Tableaux mit Spalten der Länge $\leq d$ auf.
- Für $\lambda_\rho = -d^{-1}$ findet man **para-Fermi-Statistik der Ordnung** d, d.h. es treten alle Young-Tableaux mit Zeilen der Länge $\leq d$ auf.
- Für $\lambda_\rho = 0$ findet man **infinite Statistik** ohne Restriktionen an die Young-Tableaux.

Dies wird in [DHR71], Lemma 5.4, Theorem 5.5 und [Haa92], S.150f, S.168ff vertieft. Dort findet man auch ein Argument, daß infinite Statistik in Sektoren mit positivem Energiespektrum ausschließt.

Für $\rho \in \Delta_{\text{irr}}$ mit finiter Statistik, d.h. wenn $\lambda_\rho \neq 0$ ist, werden wir jetzt — wie in §8 versprochen — die Eindeutigkeit der Linksinversen beweisen. Dazu zunächst ein technisches Lemma:

Lemma 9.6 *Sei $\rho \in \Delta_{\mathrm{irr}}$, ϕ_0 eine Linksinverse von ρ, die wie in Lemma 8.5 als Grenzwert einer Ladungstransferkette σ_{U_k} gebildet werde und ϕ sei eine beliebige Linksinverse von ρ. Dann gilt:*

$$\|\phi(A^*A)\| \geq \lambda_\rho^2 \|A^*A\| . \tag{9.6i}$$

$$\phi(A^*A) \geq \lambda_\rho^2 \phi_0(A^*A) . \tag{9.6ii}$$

Mit dem statistischen Parameter $\lambda_\rho = \phi(\varepsilon_\rho)$, der nach Korollar 9.5 nicht von der Linksinversen abhängt.

Beweis: Da ϕ normstetig ist, genügt es, die Ergebnisse für $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ zu beweisen. Dann ist hinreichend großes k zunächst $U_k^* A = \rho(A) U_k^*$. Dann können wir o.B.d.A $\varepsilon_\rho = U_k^{-1}\rho(U_k)$ setzen (wenn $\mathcal{O}_k$ im raumartigen Komplement des Lokalisierungsgebietes von ρ liegt, was für hinreichend großes k sicher der Fall ist). Damit haben wir $U_k^* A = \rho(A)\varepsilon_\rho \rho(U_k^*)$ oder

$$\phi(U_k^* A) = \lambda_\rho A U_k^* .$$

Und mit (8.5) ergibt sich

$$\phi(A^*A) \geq \phi(U_k^* A)^* \phi(U_k^* A) = \lambda_\rho^2 U_k A^* A U_k^* .$$

(Als positive Abbildung ist ϕ insbesondere selbstadjungiert, deshalb konnten wir im ersten Schritt $\phi(A^*) = \phi(A)^*$ verwenden.) Das ergibt (9.6i) und geht man für eine konvergente Teilfolge der σ_{U_k} zum Grenzwert über, so erhält man (9.6ii). ■

Jetzt zur eigentlichen Aussage:

Theorem 9.7 *i) Hat $\rho \in \Delta_{\mathrm{irr}}$ finite Statistik, dann besitzt ρ eine eindeutig bestimmte Linksinverse ϕ.*

ii) Die Folge σ_{U_k} konvergiert gegen ϕ in $\mathcal{M}$.

iii) Es gibt bis auf Äquivalenz genau eine Darstellung π von $\mathfrak{A}$, so daß $\pi \circ \rho$ die Vakuumdarstellung enthält und der korrespondierende Unterraum enthält einen zyklischen Vektor für π. Diese Darstellung ist irreduzibel und lokal normal, d.h. sie ist normal in Einschränkung auf jede lokale Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, vgl. Def.A.14.

Beweis: Sei ϕ ein Extremalpunkt der Menge der Linksinversen von ρ, d.h. eine Linksinverse, die sich nicht in eine Konvexkombination zerlegen läßt, und sei ϕ_0 Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der Ladungstransferkette σ_{U_k}. Ist, wie vorausgesetzt, $\lambda_\rho \neq 0$, so kann man ϕ schreiben als

$$\phi = (1-\eta^2)\phi_1 + \eta^2 \phi_0 , \quad \text{mit} \quad 0 < \eta^2 < \lambda_\rho^2 , \ \phi_1 \equiv \frac{\phi - \eta^2 \phi_0}{1-\eta^2} ,$$

wobei ϕ_1 nach (9.6ii) positiv und damit wieder eine Linksinverse ist. Diese Zerlegung widerspricht der Extremalität von ϕ, falls nicht $\phi = \phi_0$ ist. Also hat die Menge aller Linksinversen nur einen Extremalpunkt und deshalb nur ein Element, nach dem Krein-Milman-Theorem A.17. Damit ist i) gezeigt. Da wir wissen, daß die Ladungstransferkette σ_{U_k} eine konvergente Teilfolge besitzt, folgt ii) aus der Eindeutigkeit von ϕ. Die Situation in iii) kennen wir schon aus Satz 8.7. Wir wissen also, daß eine Darstellung π von $\mathfrak{A}$ mit Darstellungsraum $\mathfrak{H}$ existiert, so daß die Einschränkung von $\pi \circ \rho$ auf einen Unterraum $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ äquivalent ist zu π_0. dann haben wir wieder

$$\pi \circ \rho(A) V = V A , \quad \forall A \in \mathfrak{A} ,$$

wobei V eine Isometrie von $\mathfrak{H}_0$ nach $\mathfrak{H}$ mit Bild $\mathfrak{H}_1$ ist. Sei nun $0 \neq E \in \pi(A)'$ eine Projektion, dann wird

$$V^*EVA = V^*E\pi \circ \rho(A)V = V^*\pi \circ \rho(A)EV = AV^*EV\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}\,,$$

d.h. $V^*EV \in \mathfrak{A}' = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$. Nach Voraussetzung gibt es eine normierten Vektor $\xi = V\chi$, $\chi \in \mathfrak{H}_0$, der zyklisch ist für $\pi(\mathfrak{A})$ und daher die Punkte von $\pi(\mathfrak{A})'$ trennt (im schwachen Sinne). Damit muß dann $V^*EV = \langle\xi|E\xi\rangle_{\mathfrak{H}} \cdot \mathbb{1} \neq 0$ sein, und definiert man nun ϕ durch

$$\langle\xi|E\xi\rangle_{\mathfrak{H}}\phi(A) = V^*E\pi(A)EV\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}\,,$$

so ist dieses ϕ offenbar eine positive lineare Abbildung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$ mit $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ und erfüllt die definierende Eigenschaft (8.1i) einer Linksinversen. Also ist ϕ die eindeutig bestimmte Linksinverse von ρ und insbesondere unabhängig von der Wahl von E. Setzt man $E = \mathbb{1}$ und vergleicht mit obiger Gleichung, so erhält man für jeden Projektor $E \in \pi(\mathfrak{A})'$:

$$\langle\xi|E\xi\rangle_{\mathfrak{H}} V^*\pi(A)V = V^*E\pi(A)EV = V^*\pi(A)EV\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}\,,$$

und nimmt man Erwartungswerte in χ, so folgt

$$\langle\xi|E\xi\rangle_{\mathfrak{H}} = \langle\xi|\pi(A)\xi\rangle_{\mathfrak{H}} = \langle\xi|\pi(A)E\xi\rangle_{\mathfrak{H}}\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}\,.$$

Da ξ zyklisch ist für $\pi(\mathfrak{A})$ folgt aus dieser Gleichung $E\xi = \langle\xi|E\xi\rangle_{\mathfrak{H}}\xi$ und daraus ergibt sich notwendig $E = \mathbb{1}$. Das bedeutet, π ist irreduzibel. Außerdem ist der reine Zustand $\omega_0 \circ \phi$ ein Vektorzustand von π, nämlich der durch den Vektor $V\Omega$ gegebene Vektorzustand:

$$\omega_0 \circ \phi(A) = \omega_0(V^*\pi(A)V) = \langle V\Omega|\pi(A)V\Omega\rangle_{\mathfrak{H}}\,, \quad \forall A \in \mathfrak{A}\,,$$

was nichts anderes bedeutet, als daß π unitäräquivalent zur Darstellung π_ϕ aus Satz 8.7 ist, womit die Eindeutigkeit dieser Darstellung bewiesen ist. Zuletzt ist $\omega_0 \circ \phi$ lokal normal als Grenzwert einer Folge $\omega_0 \circ \sigma_{U_k}$ lokal normaler Zustände, d.h. π selbst ist lokal normal. ■

Bevor wir uns nun — wenn auch nicht in so großer Ausführlichkeit — reduziblen ρ zuwenden, folgt zunächst ein Einschub über die Kovarianz von Morphismen, den wir dann unmittelbar benötigen werden.

§10 Kovariante Morphismen

Wir sammeln nun einige Aussagen über kovariante Morphismen, von denen die wichtigste das Ergebnis ist, daß die Menge der kovarianten Morphismen abgeschlossen ist unter Produkten. Dies wird uns in §11 zustatten kommen. Alles in diesem Abschnitt gesagte gilt ganz allgemein, also auch in $1+1$ Dimensionen.

Was wir im wesentlichen zu tun haben, ist, Kovarianzoperatoren für Produkte von Morphismen zu bilden. Dazu zunächst führen wir zunächst folgenden Begriff ein:

Bezeichne im Folgenden ρ_L den durch $L \in \mathcal{P}$ „verschobenen" Morphismus:

$$\forall L \in \mathcal{P}\,,\ \rho \in \Delta: \quad \rho_L \equiv \alpha_L \circ \rho \circ \alpha_L^{-1}\,. \tag{10.1}$$

Bemerkung 10.1 *Für jedes $\rho \in \Delta(\mathcal{O})$ und $L \in \mathcal{P}$ ist ρ_L lokalisiert in $L\mathcal{O}$.*

Beweis: Sei $\rho \in \Delta(\mathcal{O})$, $A \in \mathfrak{A}(L\mathcal{O}')$. Dann ist $\rho_L(A) = \alpha_L(\rho(\alpha_L^{-1}(A))) = \alpha_L(\alpha_L^{-1}(A)) = A$, da $\alpha_L^{-1}(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$. ■

Sei nun U_ρ die unitäre Darstellung von $\mathcal{P}$ im Sektor $[\rho]$, d.h. diejenige, die die Kovarianz von ρ induziert, U_0 die im Vakuumsektor. D.h. es gilt $\alpha_L(A) = U_0(L)AU_0(L)^{-1}$, $\forall A \in \mathfrak{A}$ (wie üblich identifizieren wir hier $\mathfrak{A}$ mit seiner Vakuumdarstellung). Dann erhält man mit (5.4):

$$\rho_L(A) = \alpha_L(U_\rho(L)^{-1}\rho(A)U_\rho(L)) = U_0(L)U_\rho(L)^{-1}\rho(A)U_\rho(L)U_0(L)^{-1} .$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, daß gilt:

Lemma 10.2 *Sei $\rho \in \Delta$. Dann ist ρ_L äquivalent zu ρ. Die Äquivalenz wird vermittelt durch*

$$\rho_L = \sigma_{X_L(\rho)}\rho \quad \textit{mit} \quad X_L(\rho) \equiv U_0(L)U_\rho(L)^{-1} . \tag{10.2}$$

Beweis: Wir haben nur noch zu zeigen, daß $X_L \in \mathfrak{A}$ gilt, was aber sofort aus Lemma 5.11 folgt. ■

Man kann das alles auch nachrechnen, ohne π_0 wegzulassen. Das ist in [DHR69b], Abschnitt III durchgeführt — diese Rechnungen rechtfertigen aber unser Vorgehen nur, denn solange die Vakuumdarstellung treu ist, können wir den Observablenanteil der Kovarianzoperatoren, der ja eigentlich unter π_0 stehen müßte, mit seinem Bild in dieser Darstellung identifizieren, wie wir das bisher immer bei Observablen getan haben. Wir sehen also, daß X_L die superselection-Ladung ρ von $\mathcal{O}$ nach $L\mathcal{O}$ verschiebt. X_L ist ein Ladungstransferoperator.

Die Transfer-Operatoren erfüllen eine wichtige sogenannte *Kozykel-Identität*:

Lemma 10.3 *Für L_1, $L_2 \in \mathcal{P}$, $\rho \in \Delta$ gilt:*

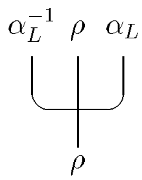
$$X_{L_2L_1}(\rho) = \alpha_{L_2}\left(X_{L_1}(\rho)\right) X_{L_2}(\rho) . \tag{10.3}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\alpha_{L_2}\left(X_{L_1}(\rho)\right) X_{L_2}(\rho) &= \alpha_{L_2}(U_0(L_1)U_\rho(L_1)^{-1})U_0(L_2)U_\rho(L_2)^{-1} = \\
&= U_0(L_2)U_0(L_1)U_\rho(L_1)^{-1}U_0(L_2)^{-1}U_0(L_2)U_\rho(L_2)^{-1} = \\
&= U_0(L_2L_1)U_\rho(L_2L_1)^{-1} = X_{L_2L_1}(\rho) .
\end{aligned}$$

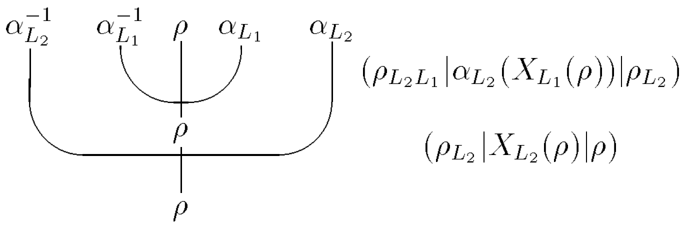
■

Mit den Begriffen aus §6 kann man das auch viel schöner zeigen: $X_L(\rho)$ ist ja ein Intertwiner von ρ nach ρ_L, d.h. $\boldsymbol{X}_L(\rho) = (\alpha_L\rho\alpha_L^{-1}|X_L(\rho)|\rho)$. Das stellt sich graphisch so dar:



$(\rho_L|X_L|\rho)$

Die einzige Möglichkeit, $X_{L_2L_1}(\rho)\in(\rho_{L_2L_1}|\rho)$ aus solchen Intertwinern zu konstruieren (ohne Überkreuzungen zuzulassen) ist offenbar:



Zunächst wendet man $X_{L_2}(\rho)$ an, und fügt dann $\alpha_{L_2}(X_{L_1}(\rho))$ ein, denn nach Bem.6.4iii) ist $\alpha_{L_2}(X_{L_1}(\rho))\in(\alpha_{L_2}\alpha_{L_1}\rho\alpha_{L_1}^{-1}\alpha_{L_2}^{-1}|\alpha_{L_2}\rho\alpha_{L_2}^{-1})$, also ist nach Punkt i) derselben Bemerkung $\alpha_{L_2}(X_{L_1}(\rho))X_{L_2}(\rho)$ der gewünschte intertwining Operator aus $(\rho_{L_2L_1}|\rho)$.

Die Abbildungen X_L sind *Kozykel* in der *Gruppenkohomologie* von $\mathcal{P}$, die durch die Kovarianzautomorphismen induziert wird: Betrachten wir den Raum der Abbildungen $C^n(\mathcal{P},\mathfrak{U})$, das ist die Menge der Abbildungen aus dem n-fachen Produkt von $\mathcal{P}$ in die Gruppe $\mathfrak{U}$ der unitären Operatoren in $\mathfrak{A}$:

$$
\begin{aligned}
C^n(\mathcal{P},\mathfrak{U})\ni X\ :\ &\underbrace{\mathcal{P}\times\ \ldots\ \times\mathcal{P}}_{n\ \text{mal}}\longrightarrow\mathfrak{U}\,,\\
X\ :\ &(L_1\,,\ \ldots,\ L_n)\longmapsto X_{L_1\,,\ \ldots,\,L_n}\,.
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

Die Sequenz $\{C^n(\mathcal{P},\mathfrak{U})\}_{n=1}^{\infty}$ wird zum **Kohomologie-Komplex** durch Einführung der **Korand-Abbildung** ∂:

$$
\begin{aligned}
&\partial\ :\ C^n(\mathcal{P},\mathfrak{U})\longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{P},\mathfrak{U})\,,\\
&(\partial X)_{L_1\,,\ \ldots,\,L_{n+1}}\equiv\alpha_{L_1}(X_{L_2\,,\ \ldots,\,L_{n+1}})\cdot\prod_{i=1}^{n}X^{(-1)^i}_{L_1\,,\ \ldots,\,L_iL_{i+1}\,,\ \ldots,\,L_{n+1}}\cdot\\
&\qquad\cdot X^{(-1)^{n+1}}_{L_1\,,\ \ldots,\,L_n}\,.
\end{aligned}
\tag{10.5}
$$

Man rechnet leicht nach, daß $\partial\partial X=\mathbb{1}$, ist. Ein $X\in C^n(\mathcal{P},\mathfrak{U})$ heißt nun n-**Kozykel**, wenn schon $\partial X=\mathbb{1}$ gilt. Für $n=1$ lautet die Kozykelbedingung nun

$$(\partial X)_{L_1\,,L_2}=\alpha_{L_1}(X_{L_2})\,X^{-1}_{L_1L_2}\,X_{L_1}=\mathbb{1}\,,$$

d.h. für jeden kovarianten Morphismus ρ ist $X_L(\rho)$ wegen (10.3) ein $\mathcal{P}$-1-Kozykel.

Für jeden kovarianten lokalisierten Morphismus ρ findet man also eine Familie $\boldsymbol{X}_L(\rho)=(\rho_L|X_L(\rho)|\rho)$ von Intertwinern, so daß die Operatoren X_L stark stetig von L abhängen (da die Darstellungen U_ρ und U_0 stark stetig sind) und die Bedingung (10.3) erfüllen. In der Tat ist die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls wahr und wir haben:

Satz 10.4 *Genau dann ist ein lokalisierter Morphismus ρ von $\mathfrak{A}$ kovariant, wenn eine Familie von Intertwinern $\boldsymbol{X}_L(\rho)=(\rho_L|X_L(\rho)|\rho)$ existiert, so daß X_L stark stetig von L abhängt und (10.3) erfüllt ist.*

Beweis: Wir haben nur noch die Umkehrung zu zeigen, sei also ρ ein lokalisierter Morphismus und eine Familie von Intertwinern wie oben gegeben. Wir definieren

$$U_\rho(L) \equiv X_L(\rho)^{-1} U_0(L)\,, \quad \forall L \in \mathcal{P}\,, \tag{10.6}$$

und zeigen, daß damit eine Darstellung von $\mathcal{P}$ gegeben ist, die die Kovarianzbedingung (5.4) für lokalisierte Morphismen erfüllt (die starke Stetigkeit ist klar). Diese rechnen wir zunächst nach: Seien $A \in \mathfrak{A}$, $L \in \mathcal{P}$ beliebig vorgegeben, dann ist

$$\begin{aligned} U_\rho(L)\rho(A)U_\rho(L)^{-1} &= X_L(\rho)^{-1}U_0(L)\rho(A)U_0(L)^{-1}X_L(\rho) = \\ &= X_L(\rho)^{-1}\alpha_L(\rho(A))X_L(\rho) = X_L(\rho)^{-1}\alpha_L(\rho(\alpha_L^{-1}(\alpha_L(A))))X_L(\rho) = \\ &= X_L(\rho)^{-1}\rho_L(\alpha_L(A))X_L(\rho) = \rho(\alpha_L(A))X_L(\rho)^{-1}X_L(\rho) = \\ &= \rho(\alpha_L(A))\,, \end{aligned}$$

ρ also kovariant. Wir müssen nun noch zeigen, daß die $U_\rho(L)$ eine Darstellung von $\mathcal{P}$ bilden. Zunächst ist

$$U_\rho(L_2L_1) = X_{L_2L_1}(\rho)^{-1}U_0(L_2)U_0(L_1) = X_{L_2}^{-1}\alpha_{L_2}(X_{L_1}(\rho)^{-1})U_0(L_2)U_0(L_1)\,,$$

mit (10.3). Nun ist (wieder mit der Poincaré-Kovarianz im Vakuumsektor)

$$U_0(L_2)^{-1}\alpha_{L_2}(X_{L_1}(\rho)^{-1})U_0(L_2) = X_{L_1}(\rho)^{-1}\,,$$

und wir finden

$$U_\rho(L_2L_1) = X_{L_2}(\rho)^{-1}X_{L_1}(\rho)^{-1}U_0(L_2)U_0(L_1) = U_\rho(L_2)U_\rho(L_1)\,,$$

womit die Darstellungeigenschaft bewiesen ist. ■

Zu beachten ist, daß in (10.6) eigentlich $\pi_0(X_L(\rho))^{-1}U_0(L)$ stehen müßte — $X_L(\rho)^{-1}$ ist der Observablenanteil $U_0(L)$ der nichtlokale Anteil des Kovarianzoperators. Der folgende Korollar schließt eine Lücke aus Kapitel §1 und macht klar, was man beachten muß, wenn man π_0 überall mitschleppt.

Korollar 10.5 *Ein zu einer kovarianten Darstellung positiver Energie aus dem Sektor $[\pi]$ gehöriger Morphismus ρ ist ebenfalls kovariant und besitzt positives Energiespektrum.*

Beweis: Gegeben einen Repräsentanten π aus $[\pi]$ und die zugehörige Darstellung U_π von $\widetilde{\mathcal{P}}$ bilden die Operatoren

$$X_{\widetilde{L}}(\pi) \equiv U_0(L)U_\pi(\widetilde{L})^{-1}\,, \quad \widetilde{L} \in \widetilde{\mathcal{P}}\,, \tag{10.7}$$

einen unitären $\widetilde{\mathcal{P}}$-1-Kozykel in $B(\mathfrak{H}_0)$ bezüglich der Wirkung

$$\mathrm{Ad}\,U_0(L)\;:\;\mathcal{B}(\mathfrak{H}_0) \ni A \longmapsto \mathrm{Ad}\,U_0(L)(A) \equiv U_0(L)AU_0(L)^{-1}\,,$$

d.h. es gilt

$$X_{\widetilde{L_1L_2}}(\pi) = \mathrm{Ad}U_0(L_1)(X_{\widetilde{L_2}})\,X_{\widetilde{L_1}}\,.$$

Dabei ist die Wirkung von $U_\pi(\widetilde{L})$ auf $\mathfrak{H}_0$ definiert durch

$$U_\pi(\widetilde{L})|_{\mathfrak{H}_0} \equiv V^{-1}U_\pi(\widetilde{L})V\,,$$

wenn V ein unitärer Operator von $\mathfrak{H}_\pi$ nach $\mathfrak{H}_0$ ist, der die lokale Äquivalenz von π und π_0 vermittelt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir V dabei so wählen, daß $\pi|_{\mathfrak{A}(\mathcal{O}')} = \pi_0|_{\mathfrak{A}(\mathcal{O}')}$ für einen gewissen Doppelkegel $\mathcal{O}$ ist (vgl. Satz 5.5). Dann rechnen wir für $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ nach:

$$\begin{aligned}\pi(\mathfrak{A}(L\mathcal{O}')) &= U_\pi(\widetilde{L})\,\pi(\mathfrak{A}(\mathcal{O}'))\,U_\pi(\widetilde{L})^{-1} = U_\pi(\widetilde{L})\,\pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O}'))\,U_\pi(\widetilde{L})^{-1} = \\ &= U_\pi(\widetilde{L})U_0(L)^{-1}\,\pi_0(\mathfrak{A}(L\mathcal{O}'))\,U_0(L)U_\pi(\widetilde{L})^{-1} = X_{\widetilde{L}}(\pi)^{-1}\,\pi_0(\mathfrak{A}(L\mathcal{O}'))\,X_{\widetilde{L}}(\pi)\,.\end{aligned} \tag{10.8}$$

Für ein $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}') \cap \mathfrak{A}(L\mathcal{O}')$ bedeutet dies

$$\pi(A) = \pi_0(A) = X_{\widetilde{L}}(\pi)^{-1}\pi_0(A)X_{\widetilde{L}}(\pi)\,,$$

was wegen der Haag-Dualität im Vakuumsektor nichts anderes heißt, als

$$X_{\widetilde{L}}(\pi) \in \pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{O} \vee L\mathcal{O}))\,. \tag{10.9}$$

Da die Vakuumdarstellung treu und der Vakuumvektor zyklisch und separierend ist, gibt es zu jedem $X_{\widetilde{L}}(\pi)$ genau ein $X_{\widetilde{L}}(\rho) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O} \vee L\mathcal{O})$, so daß

$$\pi_0(X_{\widetilde{L}}(\rho)) = X_{\widetilde{L}}(\pi)\,, \tag{10.10}$$

ist. Man sieht unmittelbar, daß $X_{\widetilde{L}}(\rho)$ ein $\widetilde{\mathcal{P}}$-1-Kozykel in $\mathfrak{U}$ bezüglich der Wirkung von $\alpha_{\widetilde{L}} \equiv \alpha_L$ ist, der die Bedingungen von Satz 10.4 erfüllt. Das heißt

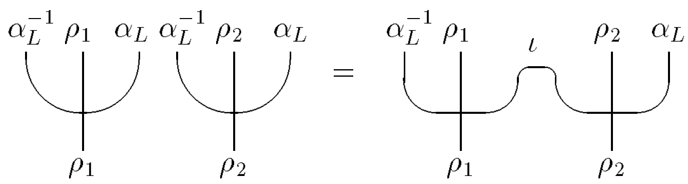
$$\widetilde{\mathcal{P}} \ni \widetilde{L} \longmapsto U_\rho(\widetilde{L}) \equiv \pi_0(X_{\widetilde{L}}(\rho)^{-1})U_0(L)\,, \tag{10.11}$$

induziert die Kovarianz von ρ, was man analog zum Beweis des obigen Satzes nachrechnet. ∎

Wir sind jetzt sehr nahe daran, unter Benutzung des obigen Satzes beweisen zu können, daß Produkte kovarianter Morphismen kovariant sind. Die dazu nötige Familie von Intertwinern von $\rho_2\rho_1$ nach $(\rho_2\rho_1)_L$ finden wir, indem wir das $\times$–Produkt bilden:

$$\boldsymbol{X}_L(\rho_2) \times \boldsymbol{X}_L(\rho_1) = (\rho_{2L}\rho_{1L}|X_L(\rho_2)\rho_2(X_L(\rho_1))|\rho_2\rho_1)\,, \tag{10.12}$$

wobei $\rho_{2L}\rho_{1L} = \alpha_L\rho_2\alpha_L^{-1}\alpha_L\rho_1\alpha_L^{-1} = \alpha_L\rho_2\rho_1\alpha_L^{-1} = (\rho_2\rho_1)_L$ ist. Wenn man das graphisch darstellt wird man auf eine neue Konvention geführt:



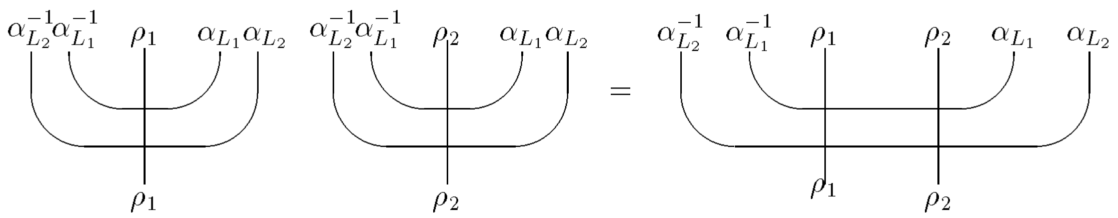
Dieser Intertwiner geht ja nach $\alpha_L^{-1}\rho_2\rho_1\alpha_L$, d.h. die Automorphismen in der Mitte heben sich weg. Dies müssen wir so darstellen können, daß die mittleren α_L^{-1}, α_L nicht mehr als Endpunkte von Intertwinerlinien auftreten, was wir auf konsistente Weise erreichen können, indem wir die „losen Enden“ verknüpfen (die Markierung mit dem identischen Morphismus dient nur der Deutlichkeit, ist aber prinzipiell redundant).

Lemma 10.6 *Seien ρ_1, $\rho_2 \in \Delta$. $\boldsymbol{X}_L(\rho_2\rho_1)$ definiert durch*

$$\boldsymbol{X}_L(\rho_2\rho_1) \equiv \boldsymbol{X}_L(\rho_2) \times \boldsymbol{X}_L(\rho_1)\,, \tag{10.13}$$

erfüllt (10.3).

Beweis: Das können wir nun graphisch zeigen. Zunächst ist $\boldsymbol{X}_{L_2L_1}(\rho_2\rho_1) = \boldsymbol{X}_{L_2L_1}(\rho_2) \times \boldsymbol{X}_{L_2L_1}(\rho_1)$ und das wird dargestellt durch



wendet man die oben eingeführte Konvention an, so erhält man das Diagramm auf der rechten Seite und das ist nichts anderes als $\alpha_{L_2}(\boldsymbol{X}_{L_1}(\rho_2\rho_1)) \circ \boldsymbol{X}_{L_2}(\rho_2\rho_1)$. ■

Im Prinzip war das eine Anwendung von (6.7). Diese Rechenregel kann man aber erst verwenden, wenn man die vier innenliegenden Automorphismen eliminiert hat. Die waagerechten Identitätslinien zwischen ρ_1 und ρ_2 sind offenbar redundant!

Damit haben wir jetzt:

Lemma 10.7 ρ_1, $\rho_2 \in \Delta \Longrightarrow \rho_2\rho_1 \in \Delta$.

Beweis: Um Satz 10.4 auf $\rho_2\rho_1$ anwenden zu können, müssen wir nur noch zeigen, daß

$$X_L(\rho_2\rho_1) = X_L(\rho_2)\rho_2(X_L(\rho_1))\,,$$

stark stetig in L ist. Nun ist die Darstellung $\pi_0 \circ \rho_2$ lokal normal und jeder der zwei Faktoren auf der rechten Seite der obigen Gleichung hat Norm 1. Deshalb ist ihr Produkt stark stetig. ■

Explizit finden wir:

Korollar 10.8 *Durch*

$$U_{\rho_2\rho_1}(L) = \rho_2(X_L(\rho_1))^{-1}U_{\rho_2}(L)\,, \quad \forall \rho_1\,,\,,\rho_2 \in \Delta\,,\ L \in \mathcal{P}\,, \tag{10.14}$$

ist die Darstellung der Poincarégruppe im Sektor $[\rho_2\rho_1]$ gegeben.

Beweis:

$$X_L(\rho_2\rho_1) = U_0(L)U_{\rho_2\rho_1}(L)^{-1} = X_L(\rho_2)\rho_2(X_L(\rho_1)) = U_0(L)U_{\rho_2}(L)^{-1}\rho_2(X_L(\rho_1))\,,$$

woraus unmittelbar die behauptete Darstellung folgt. ■

Als interessante Anwendung zeigen wir noch

Lemma 10.9 *Ist $\rho\in\Delta(\mathcal{O})$ ein Automorphismus, so ist auch $\rho^{-1}\in\Delta(\mathcal{O})$ und es gilt*

$$U_{\rho^{-1}}(L)=\rho^{-1}(X_L(\rho))U_0(L)\,,\quad \forall L\in\mathcal{P}\,. \tag{10.15}$$

Beweis: Zunächst ist ρ^{-1} natürlich genauso lokalisiert wie ρ, denn $\forall A\in\mathfrak{A}(\mathcal{O}')\ :\ \rho^{-1}(A)=\rho^{-1}(\rho(A))=A$. Weiter rechnet man:

$$\begin{aligned}U_{\rho^{-1}}(L)\rho^{-1}(A)U_{\rho^{-1}}(L)^{-1}&=\rho^{-1}(X_L(\rho))\alpha_L(\rho^{-1}(A))\rho^{-1}(X_L(\rho))^{-1}=\\&=\rho^{-1}(X_L(\rho))\rho(\alpha_L(\rho^{-1}(A)))X_L(\rho)^{-1})=\\&=\rho^{-1}(\alpha_L(\rho(\alpha_L^{-1}(\alpha_L(\rho^{-1}(A))))))=\rho^{-1}(\alpha_L(A))\,,\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Eine Warnung ist an dieser Stelle angebracht: Wir haben oben nirgends sauber zwischen Observablen- und nichtlokalem Anteil der Kovarianzoperatoren unterschieden. Das ist, wie oben schon erwähnt, auch unwesentlich, solange die Vakuumdarstellung π_0 treu ist. Wenn wir später in Kapitel IV auf eine nicht mehr treue Vakuumdarstellung treffen, müssen wir in alle Formeln für Kovarianzoperatoren diese wieder explizit hineinschreiben, zum Beispiel lautet (10.14) dann:

$$U_{\rho_2\rho_1}(L)=\pi_0(\rho_2(X_L(\rho_1))^{-1})U_{\rho_2}(L)\,. \tag{10.16}$$

§11 Reduzible Morphismen

Setzen wir nun die Analyse der Statistik fort. Zuvor sei festgehalten, daß fast alle Aussagen dieses Abschnitts auch in $1+1$ Dimensionen gelten, was uns noch sehr nützlich sein wird.

Unser Ziel wird sein, reduzible kovariante Morphismen in endliche direkte Summen irreduzibler kovarianter Morphismen zerlegen, was, wie wir sehen werden nur möglich ist, wenn keine irreduzible Komponente von ρ infinite Statistik besitzt. Das ist eine Verallgemeinerung des Begriffs *finite Statistik*, von der wir zeigen können, daß sie äquivalent ist zu folgender

Definition 11.1 *Ein Morphismus $\rho\in\Delta$ heißt* **finit**, *wenn eine Linksinverse ϕ von ρ existiert mit $0\notin\operatorname{spec}\phi(\varepsilon_\rho)$, d.h., wenn $\phi(\varepsilon_\rho)$ ein beschränkt invertierbarer Operator ist. Eine Linksinverse, die diese Bedingung erfüllt heißt* **spezielle Linksinverse** *von ρ. Die Menge der kovarianten finiten Morphismen wird mit Δ_{fin} bezeichnet.*

Schaffen wir es nun, jeden finiten Morphismus zu zerlegen, dann insbesondere auch *kovariante* finite Morphismen, und dann wissen wir mit Satz 5.8, daß die irreduziblen Komponenten wieder kovariant sind. Bei dieser Zerlgung wird nebenbei herauskommen, daß die Statistik finiter reduzibler Morphismen eine Summe der am Ende von §7 gefundenen Statistik irreduzibler Morphismen mit finiter Statistik ist.

Das Werkzeug, daß die Zerlegung ermöglicht, werden die Linksinverse des finiten Morphismus' ρ und der statistische Operator $\phi(\varepsilon_\rho)$ sein. Beginnen wir mit einem einfachen Resultat über das Spektrum des statistischen Operators.

Satz 11.2 *Sei ϕ eine Linksinverse für $\rho\in\Delta$ und F eine Spektralprojektion des selbstadjungierten Operators $\Lambda\equiv\phi(\varepsilon_\rho)$ zu $\{t\in\mathbb{R}\,|\,|t|\geq\delta\}$ mit $\delta>0$. Dann gibt es höchstens $m<\infty$ viele orthogonale Projektionen $E_i\in\rho(\mathfrak{A})'$, $i=1,\ \ldots,\ m$ mit $E_i\leq F$.*

Beweis: Sei $E \in \rho(\mathfrak{A})'$ eine Projektion mit $0 < E \leq F$ und seien $\rho \in \Delta(\mathcal{O})$, $\widehat{\rho} \in \Delta(\widehat{\mathcal{O}})$ mit $\widehat{\mathcal{O}} \between \mathcal{O}$ und sei $U \in (\widehat{\rho}|\rho)$ unitär. Dann gilt insbesondere $E \in \rho(\mathfrak{A}(\mathcal{O}')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O}')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ und somit $\widehat{\rho}(E) = E$. Benutzten wir $\widehat{\rho}$ als Hilfsmorphismus für die Definition des statistischen Operators so gilt mit (7.1) $\varepsilon_\rho = U^{-1}\rho(U)$. Weiter gilt aufgrund der Intertwinereigenschaft von U: $U^{-1}\widehat{\rho}(E) = U^{-1}E = \rho(E)U^{-1}$. Damit findet man

$$U^{-1}E = \rho(E)U^{-1} = \rho(E)\varepsilon_\rho\rho(U)^{-1}.$$

Nun kann man $E = E^2$ auch schreiben als $E = (U^{-1}E)^*(U^{-1}E)$ und mit (8.5) ergibt sich

$$\phi(E) \geq \phi(U^{-1}E)^*\phi(U^{-1}E) = U\Lambda E\Lambda U^{-1}.$$

Nun gilt $\|U\Lambda E\Lambda U^{-1}\| = \|\Lambda E\Lambda\| = \|(E\Lambda)^*E\Lambda\| = \|E\Lambda\|^2 = \|\Lambda E\|^2$, und außerdem gilt natürlich $\|\Lambda F\| \geq \delta$ und weil $EF = FE = E$ (E ist ja ein Unterprojektor von F) auch $\|\Lambda E\| \geq \delta$, d.h. $\|\Lambda\|^2 \geq \delta^2$. Damit haben wir also letztendlich $\|\phi(E)\| \geq \delta^2$. Nun folgt aus $E \in \rho(\mathfrak{A})'$, daß $\phi(E) \in \mathfrak{A}' = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$ ist. Also gilt $\phi(E) \geq \delta^2 \cdot \mathbb{1}$. Sind nun $E_1, \ldots, E_m$ wechselweise orthogonale Projektionen mit $E_j \leq F$ und damit $\sum_{j=1}^{m} E_j \leq F$. Dann gilt wegen der Positivität und Linearität von ϕ:

$$\mathbb{1} \geq \phi(F) \geq \phi\left(\sum_{j=1}^{m} E_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \phi(E_j) \geq m\delta^2 \cdot \mathbb{1},$$

was nichts anderes bedeutet, als $m \leq \delta^{-2}$. ■

Korollar 11.3 *i) Für $\rho \in \Delta$ besitzt $\phi(\varepsilon_\rho)$ abzählbar diskretes Spektrum dessen einziger möglicher Häufungspunkt 0 ist.*

ii) Ist $\rho \in \Delta$ sogar finit, so ist $\operatorname{spec}\phi(\varepsilon_\rho)$ gleich $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $m < \infty$, d.h. $\phi(\varepsilon_\rho) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot F_j$, wobei F_j die Eigenprojektion zum Eigenwert λ_j bezeichnet.

Beweis: i): Da $\phi(\varepsilon_\rho) \in \rho(\mathfrak{A})'$ ist, ist auch $\{\phi(\varepsilon_\rho)\}'' \subset \rho(\mathfrak{A})'$. Das heißt, jede Spektralprojektion von $\phi(\varepsilon_\rho)$ liegt in $\rho(\mathfrak{A})'$. Auf jede solche Spektralprojektion kann man den vorigen Satz anwenden, woraus folgt, daß das Spektrum $\operatorname{spec}\phi(\varepsilon_\rho)$ außerhalb jedes Intervalls $[-\delta, \delta]$ eine endliche, diskrete Menge sein muß. ii) folgt unmittelbar aus i). ■

Erinnern wir uns an Satz 5.8, so erscheint es für unser jetziges Vorhaben nützlich, Linksinverse für direkte Summen $\rho \cong \bigoplus_j \rho_j$ und Unterdarstellungen $\rho|_E$ zu besitzen.

Lemma 11.4 *Sei ϕ eine Linksinverse für $\rho \in \Delta$ und seien $S, T \in (\rho|\rho_1)$. Dann gilt:*

i) $\phi(SAS^*) = \phi_1(A)\phi(SS^*)$, $\forall A \in \mathfrak{A}$, wobei ϕ_1 eine Linksinverse für ρ_1 ist.

ii) $\phi(S\varepsilon_{\rho_1}T^*) = T^*\phi(\varepsilon_\rho)S$.

iii) Ist ρ_1 irreduzibel, dann gilt:

$$\phi(E\varepsilon_\rho E) = E\phi(\varepsilon_\rho)E = \lambda_{\rho_1}\phi(E)E,$$

wenn $S^*S = \mathbb{1}$, $SS^* = E$ ist.

Beweis: Angenommen es wäre $\phi(SS^*) = 0$. Dann folgt aus der Positivität von ϕ, daß auch $\phi(SAS^*) = 0$ gilt für alle $A \in \mathfrak{A}$. Sei also nun $\phi(SS^*) \neq 0$. Dann definieren wir ϕ_1 durch

$$\phi_1(A) \equiv \frac{1}{\phi(SS^*)}\phi(SAS^*), \quad \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{11.1}$$

Offenbar ist ϕ_1 eine Linksinverse für ρ_1 (beachte, daß $\phi(SS^*) \in (\iota|\iota)$ ein Skalar ist) und damit ist i) gezeigt. Mit Lemma 7.9 können wir folgende Rechnung ansetzen:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{I}_{\rho_1}) \circ \boldsymbol{\varepsilon}(\rho_1, \rho_1) \circ (\boldsymbol{T}^* \times \boldsymbol{I}_{\rho_1}) &= \boldsymbol{\varepsilon}(\rho_1, \rho) \circ (\boldsymbol{I}_{\rho_1} \times \boldsymbol{S}) \circ (\boldsymbol{T}^* \times \boldsymbol{I}_{\rho_1}) = \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}(\rho_1, \rho) \circ (\boldsymbol{T}^* \times \boldsymbol{I}_{\rho_1}) \circ (\boldsymbol{I}_{\rho_1} \times \boldsymbol{S}) = \\ &= (\boldsymbol{I}_{\rho_1} \times \boldsymbol{T}^*) \circ \boldsymbol{\varepsilon}(\rho, \rho) \circ (\boldsymbol{I}_{\rho_1} \times \boldsymbol{S}).\end{aligned}$$

Wendet man ϕ auf diese Gleichung an, so folgt ii). Mit i) findet man weiter $\phi(S\varepsilon_{\rho_1}S^*) = \phi_1(\varepsilon_{\rho_1})\phi(E)\lambda_{\rho_1}\phi(E)$ und mit ii) folgt $\lambda_{\rho_1}\phi(E) = S^*\phi(\varepsilon(\rho,\rho))S$. Und deshalb gilt schließlich, wenn man nocheinmal ii) benutzt:

$$\lambda_{\rho_1} S\phi(E)S^* = E\phi(\varepsilon(\rho,\rho))E = \phi(E\varepsilon(\rho,\rho)E),$$

(beachte, daß $E \in (\rho|\rho)$ selbstadjungiert ist). Man sieht, daß dies iii) ist, denn $\phi(E)$ ist ein Skalar und kommutiert deshalb mit S. ■

Satz und Definition 11.5 *i) Seien $\phi_1, \ldots, \phi_m$ Linksinverse für $\rho_1, \ldots, \rho_m$, respektive. Sei weiter $\rho \cong \bigoplus_{j=1}^m \rho_j$, d.h. es gebe Isometrien $V_j \in (\rho|\rho_j)$ mit $V_j^* V_k = \delta_{j,k} \cdot \mathbb{1}$, $\sum_j V_j V_j^* = \mathbb{1}$ und $\rho(A) = \sum_j V_j \rho_j(A) V_j^*$, $\forall A \in \mathfrak{A}$. Wir definieren eine konvexe Kombination*

$$\phi(A) \equiv \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(V_j^* A V_j), \quad \forall A \in A. \tag{11.2}$$

mit $c_j \geq 0$, $\sum_j c_j = 1$. ϕ ist eine Linksinverse für ρ. Weiter gilt

$$\phi(\varepsilon_\rho) = \sum_{j=1}^m c_j V_j \phi_j(\varepsilon_{\rho_j}) V_j^*. \tag{11.3}$$

ii) Sei ϕ eine Linksinverse für $\rho \in \Delta$ und $0 \neq E \in (\rho|\rho)$ ein selbstadjungierter Projektor. Wähle $\rho|_E$ so, daß eine Isometrie $V \in (\rho|\rho|_E)$ existiert mit $V^*V = \mathbb{1}$, $VV^* = E$. Dann definiert

$$\phi_{\rho|_E}(A) \equiv \phi(E)^{-1}\phi(VAV^*), \tag{11.4}$$

eine Linksinverse von $\rho|_E$ und es gilt

$$\phi_{\rho|_E}(\varepsilon_{\rho|_E}) = \phi(E)^{-1} V^* \phi(\varepsilon_\rho) V. \tag{11.5}$$

Beweis: i): Die Hauptaussage ist klar. Nach Lemma 11.4ii) gilt $\phi_j(V_j^*\varepsilon_\rho V_j) = V_j\phi_j(\varepsilon_{\rho_j})V_j^*$, woraus die Gleichung für $\phi(\varepsilon_\rho)$ folgt. ii): Die Definition der Linksinversen ist natürlich nach Lemma 11.4i) und die Gleichung für $\phi_{\rho|_E}(\varepsilon_{\rho|_E})$ folgt aus ii) des Lemmas. ■

Als Fingerübung zeigen wir, daß die Eigenschaft eines Morphismus finit zu sein, sich auf seinen ganzen Sektor erstreckt.

Bemerkung 11.6 *Ist $\rho \in \Delta$ finit, so auch jedes $\widehat{\rho} \in [\rho]$.*

Beweis: Sei ϕ eine spezielle Linksinverse von ρ und sei $V \in (\rho|\widehat{\rho})$ unitär. Setzt man $S \equiv V$ in Lemma 11.4i), so bekommt man eine Linksinverse ϕ_1 von ρ_1 mit $\phi_1(\varepsilon_{\rho_1}) = V^*\phi(\varepsilon_\rho)V$ nach Satz 11.5ii). Das bedeutet, $\phi_1(\varepsilon_{\rho_1})^{-1} = V^*\phi(\varepsilon_\rho)^{-1}V$ ist beschränkt invertierbar. ■

Damit haben wir alles, um die Maschinerie zum laufen zu bringen.

Satz 11.7 *Ist ρ ein finiter Morphismus, so ist ρ eine endliche direkte Summe irreduzibler Morphismen mit finiter Statistik.*

Beweis: Betrachten wir wieder die Zerlegung von $\phi(\varepsilon_\rho)$ in $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot F_j$ aus Korollar 11.3ii). Durch die F_j wird dann auch eine Zerlegung $\rho \cong \bigoplus_j \rho_j$ gegeben. Wendet man Lemma 11.2 an, so stellt sich heraus, daß jedes ρ_j in eine endliche direkte Summe von irreduziblen Morphismen zerlegt werden kann: $\rho_j \cong \bigoplus_k \rho_{j,k}$. Diese Zerlegung korrespondiert zu der Zerlegung von F_j in wechselseitig orthogonale Projektoren aus Lemma 11.2: $F_j = \sum_k E_{j,k}$. Die $E_{j,k}$ bilden also ein Orthogonalsystem von minimalen Projektoren in $(\rho|\rho)$, $E_{j,k} \leq F_j$. Das bedeutet, daß die $\rho_{j,k}$ irreduzibel sind. Bleibt zu zeigen, daß die $\rho_{j,k}$ finite Statistik besitzen. Zunächst haben wir $\phi(E_{j,k}) > 0$, wenn ϕ eine spezielle Linksinverse für ρ ist. Weiter wählen wir $V_{j,k} \in (\rho|\rho_{j,k})$ mit $V_{j,k}^* V_{j,k} = \mathbb{1}$, $V_{j,k}V_{j,k}^* = E_{j,k}$. Setzt man dann $V \equiv V_{j,k}$, $E \equiv E_{j,k}$ in Satz 11.5ii), so erhält man Linksinverse $\phi_{j,k}$ für $\rho_{j,k}$. Da $\rho_{j,k}$ irreduzibel ist, gilt $\phi_{j,k}(\varepsilon_{\rho_{j,k}}) = \lambda_{\rho_{j,k}} \cdot \mathbb{1}$. Wir zeigen, daß $\lambda_{\rho_{j,k}} \neq 0$ gilt: Denn nach Lemma 11.4iii) gilt, wenn wir dort $S \equiv V_{j,k}$, $E \equiv E_{j,k}$ setzen:

$$E_{j,k}\phi(\varepsilon_\rho)E_{j,k} = \lambda_{\rho_{j,k}}\phi(E_{j,k})E_{j,k} \,.$$

aber nach i) desselben Lemmas ist $\phi(\varepsilon_\rho)F_j = \lambda_{\rho_j}F_j$ und $E_{j,k}F_j = F_jE_{j,k} = E_{j,k}$, da $E_{j,k} \leq F_j$. Deshalb ist $E_{j,k}\phi(\varepsilon_\rho)E_{j,k} = \lambda_{\rho_j}E_{j,k}$ und daraus folgt $\lambda_{\rho_j} \cdot \mathbb{1} = \lambda_{\rho_{j,k}}\phi(E_{j,k})$, d.h. $\lambda_{\rho_{j,k}} \neq 0$ und damit ist $\rho_{j,k}$ finit. ■

Nun füllen wir noch die Lücke, die im Beweis von Satz 5.8 geblieben war, als es darum ging, die Kovarianz von Unterdarstellungen und direkten Summen zu zeigen.

Bemerkung 11.8 *Sind ρ, $\rho' \in \Delta$ finit, so ist der Intertwinerraum $(\rho'|\rho)$ endlichdimensional.*

Beweis: Klar nach Satz 11.7 und Bem. 6.4ii). ■

Satz 11.9 *Ist $\rho \in \Delta$ finit, so gilt*

i) Es gibt nur eine stark stetige, unitäre Darstellung U_ρ der Poincarégruppe , die die Kovarianzbedingung (5.4) erfüllt.

ii) $U_\rho(L) \in \rho(\mathfrak{A})''$, $\forall L \in \mathcal{P}$.

iii) Sind ρ_1 , $\rho_2 \in \Delta$ finit und $\boldsymbol{R} = (\rho_2|R|\rho_1)$, dann gilt auch $RU_{\rho_1}(L) = U_{\rho_2}(L)R$, $\forall L \in \mathcal{P}$.

Beweis: ii) folgt unmittelbar aus iii), wenn man $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ setzt. i) folgt ebenfalls aus iii), denn für zwei Darstellungen $U_{\rho,1}$, $U_{\rho,2}$ der Poincarégruppe , die die Kovarianzbedingung erfüllen, kann man $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}_\rho$ wählen. Zu iii): Seien ρ, $\rho' \in \Delta$, $R \in (\rho'|\rho)$. Dann definieren wir durch

$$R \longmapsto R_L \equiv U_{\rho'}(L) R U_\rho(L)^{-1} \in (\rho'|\rho)\,,$$

eine stark stetige, unitäre Darstellung auf $(\rho'|\rho)$. Um das zu zeigen, müssen wir $(\rho'|\rho)$ mit einem geeigneten Skalarprodukt versehen. Betrachten wir dazu zunächst Wirkung von $\mathcal{P}$ auf der C*-Algebra $(\rho|\rho) = \rho(\mathfrak{A})'$. Diese Algebra ist nach Satz 11.7 eine endliche direkte Summe von Matrizenalgebren (die von den minimalen Projektoren in $\rho(\mathfrak{A})'$ erzeugte Algebra. Da das Zentrum von $(\rho|\rho)$ diskret ist, muß es aus Stetigkeitsgründen punktweise invariant unter der oben definierten Wirkung von $\mathcal{P}$ sein. Also wirkt $\mathcal{P}$ durch Automorphismen auf jeder einzelnen der Matrizenalgebren. Sei ω ein Zustand der proportional zum Spurzustand auf jeder der Matrizenalgebren ist, dann ist ω ein treuer Zustand auf $(\rho|\rho)$ und invariant unter der Wirkung von $\mathcal{P}$. Dann definieren wir das $\mathcal{P}$-invariante Skalarprodukt auf $(\rho'|\rho)$ durch

$$\langle R|R'\rangle \equiv \omega(R^* R')\,.$$

Dieser Intertwinerraum ist nun aber endlichdimensional nach obiger Bemerkung. Da keine nichttriviale unitäre, stark stetige, endlichdimensionale Darstellung von $\mathcal{P}$ existiert, muß die obige trivial sein und das nutzen wir, um die Behauptung zu zeigen: Es gilt dann nämlich

$$R = R_L = U_{\rho'}(L) R U_\rho(L)^{-1} \implies U_\rho(L) R = R U_{\rho'}(L)\,,$$

wie erwünscht. ■

Wir wissen nun also, daß die Menge der kovarianten Morphismen abgeschlossenen Morphismen abgeschlossen ist unter direkten Summen, Produkten und Unterdarstellungen (vgl. Satz 5.8).

Wir können jetzt mit Satz 11.9 alles auf kovariante Morphismen anwenden.

Korollar 11.10 *i) Jeder finite Morphismus $\rho \in \Delta$ ist in eine endlichen direkte Summe von Morphismen $\rho_i \in \Delta_{\mathrm{irr}}$ mit finiter Statistik zerlegbar:*

$$\rho \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \rho_i\,. \tag{11.6}$$

ii) Das Produkt von $\rho_1\rho_2$ mit finiten ρ_1, $\rho_2 \in \Delta$ ist in eine endliche direkte Summe von kovarianten irreduziblen Morphismen mit finiter Statistik zerlegbar:

$$\rho_1\rho_2 \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \rho_i\,. \tag{11.7}$$

Beweis: i) folgt aus Satz 11.7 und der Tatsache, daß Unterdarstellungen kovarianter Morphismen wieder kovariant sind, d.h. aus Satz 5.8. ii) folgt aus i) und Lemma 10.7. ■

Lemma 11.11 *Sei $\rho \cong \bigoplus_{j=1}^{m} \rho_j$ eine endliche direkte Summe kovarianter finiter Morphismen $\rho_j \in \Delta$, $j = 1, \ldots, m$. Dann ist auch $\rho \in \Delta$ finit.*

Beweis: $\rho \in \Delta$ folgt aus Satz 5.8. Seien ϕ_j Linksinverse für ρ_j und V_j wie in Satz 11.5i). Wähle wie dort eine Linksiverse ϕ für ρ aber mit $c_j > 0\,,\ j = 1,\ \ldots, m$. Dann ist $\phi(\varepsilon_\rho)^{-1} = \sum_{j=1}^m c_j^{-1} V_j \phi_j(\varepsilon_{\rho_j})^{-1} V_j^*$, denn man rechnet nach:

$$\left(\sum_{j=1}^m c_j^{-1} V_j \phi_j(\varepsilon_{\rho_j})^{-1} V_j^*\right) \cdot \phi(\varepsilon_\rho) = \sum_{j,\,k=1}^m c_j^{-1} c_k V_j \phi_j(\varepsilon_{\rho_j})^{-1} V_j^* V_k \phi(\varepsilon_{\rho_k}) V_k^* =$$

$$= \sum_{j=1}^m V_j \phi_j(\varepsilon_{\rho_j})^{-1} \phi_j(\varepsilon_{\rho_j}) V_j^* = \sum_{j=1}^m V_j V_j^* = \mathbb{1}\,.$$

Dies ist ein beschränkter Operator und daher ist ρ finit. ■

Korollar 11.12 *Genau dann ist $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$, wenn ρ eine endliche direkte Summe von Morphismen mit finiter Statistik aus Δ_{irr} ist.*

Beweis: Das folgt aus Korollar 11.10 und Lemma 11.11. ■

Wir führen nun ein wertvolles Hilfsmittel für die Behandlung finiter reduzibler Morphismen ein.

Definition 11.13 *Eine Linksinverse ϕ von $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$ heißt* **standard**, *wenn*

$$\phi(\varepsilon_\rho)^* \phi(\varepsilon_\rho) = \phi(\varepsilon_\rho) \phi(\varepsilon_\rho)^* \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \cdot \mathbb{1}\,, \tag{11.8}$$

d.h. ein Skalar ist.

Das scheint zunächst eine strenge Bedingung an einen Operator, von dem wir a priori noch nicht viel wissen, doch läßt sie sich immer erfüllen:

Bemerkung 11.14 *Jedes $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$ besitzt eine Standard-Linksinverse ϕ.*

Beweis: Wir wissen nun, daß ρ eine endliche direkte Summe von Morphismen $\rho_j \in \Delta_{\text{irr}}$ mit finiter Statistik ist und daß eine Linksinverse von ρ wie in Satz 11.5i) definiert werden kann. Mit der dortigen Formel rechnen wir für $\phi(\varepsilon_\rho)^* \phi(\varepsilon_\rho)$ aus:

$$\phi(\varepsilon_\rho)^* \phi(\varepsilon_\rho) = \textstyle\sum_{j,k} c_j^* c_k V_j \phi_j(\varepsilon_{\rho_j})^* V_j^* V_k \phi(\varepsilon_{\rho_k}) V_k =$$

$$= \textstyle\sum_j |c_j|^2 \lambda_{\rho_j}^2 V_j V_j^* = \sum_j |c_j|^2 \lambda_{\rho_j}^2 \cdot \mathbb{1}\,.$$

Wählt man z.B. alle $c_j \neq 0$ so ist auch $\phi(\varepsilon_\rho)^2 \neq 0$. ■

Korollar 11.15 *Ist ϕ eine Standard-Linksinverse von $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$, so gilt*

$$\|\phi(A^*A)\| \geq \|\phi(\varepsilon_\rho)^2\|\, \|A^*A\|\,, \tag{11.9}$$

d.h. ϕ ist treu.

Beweis: Es reicht, (11.9) für $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ zu prüfen. Sei $\boldsymbol{U} = (\rho'|U|\rho)$ ein unitärer Intertwiner und das Lokalisierungsgebiet von ρ' liege raumartig zu ρ und $\mathcal{O}$. Dann gilt $\rho(B) = U^{-1}BU$ und $\varepsilon_\rho = U^{-1}\rho(U)$. Dann wird mit (8.5):

$$\phi(A^*A) \geq \phi(U^{-1}A)^*\phi(U^{-1}A) = \phi(\rho(A)U^{-1})^*\phi(\rho(A)U^{-1} = \phi(U)A^*A\phi(U^{-1}) = \\ = U\phi(\varepsilon_\rho^*)A^*A\phi(\varepsilon_\rho)U^{-1}\,,$$

woraus die Behauptung folgt, denn $\|\phi(\varepsilon_\rho)\|^{-1}\phi(\varepsilon_\rho)$ ist unitär. ∎

Korollar 11.16 *Ist $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$ und $E \in (\rho|\rho)$ ein selbstadjungierter Projektor, dann ist der zugehörige Morphismus $\rho|_E$ ebenfalls in Δ_{fin}.*

Beweis: die Kovarianz folgt aus Satz 5.8. Die Zerlegung $\rho \cong \rho|_E \oplus \rho|_{\mathbb{1}-E}$ kann zu einerZerlegung in irreduzible Komponenten verfeinert werden. Wenn gezeigt ist, daß diese Komponenten finite Statistik besitzen, dann folgt aus Korollar 11.12, daß auch $\rho|_E$ finit ist. Das ist aber klar, denn die Zerlegung von ρ in irreduzible Komponenten ist eindeutig bis auf Umordnung und unitäräquivalenz, d.h. man findet im wesentlichen immer die Zerlegung aus Satz 11.7 und deren Komponenten sind finit. ∎

Was für Summen und Unterdarstellungen recht ist, sollte nach Korollar 11.10ii) für Produkte nur billig sein. Konstruieren wir also Linksinverse für Produkte kovarianter finiter Morphismen.

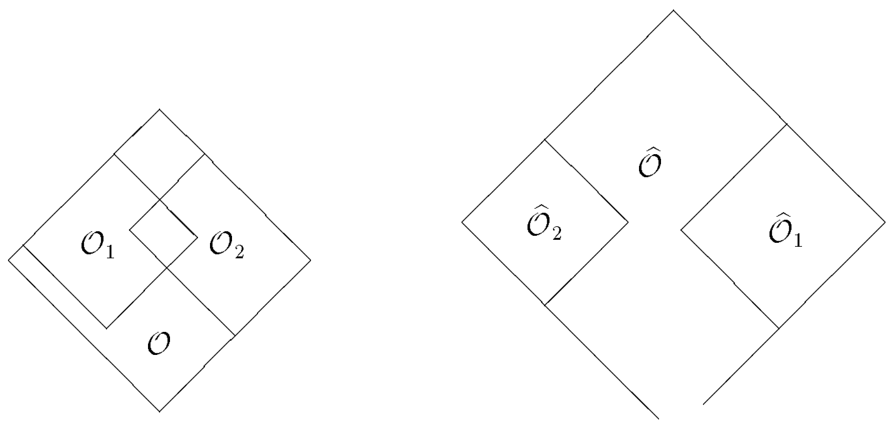
Lemma 11.17 *Seien ρ_1, $\rho_2 \in \Delta_{\text{fin}}$ und ϕ_1, ϕ_2 spezielle Linksinverse für diese Morphismen. Dann ist $\phi_2 \circ \phi_1$ eine Linksinverse für $\rho_1\rho_2 \in \Delta$ und es gilt:*

$$(\phi_2 \circ \phi_1)(\boldsymbol{\varepsilon}_{\rho_1\rho_2}) = \phi_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{\rho_1}) \times \phi_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{\rho_2})\,, \tag{11.10}$$

d.h. $\phi_2\phi_1(\varepsilon_{\rho_1\rho_2}) = \phi_1(\varepsilon_{\rho_1})\rho_1(\phi_2(\varepsilon_{\rho_2}))$.

Die obige Formel für die Komposition der verallgemeinerten statistischen Parameter kann, wie wir im Beweis gleich sehen werden, nicht in 1 + 1 Dimensionen gelten. Aufgrund der komplizierteren Struktur der Zopfgruppe werden wir dort ein etwas anderes Ergebnis finden, was aber nichts daran ändern wird, daß $\rho_1\rho_2$ auch dort finit sein wird.

Beweis: $\rho_1\rho_2 \in \Delta$ gilt nach Lemma 10.7. Seien $\rho_i \in \Delta(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$, $\rho_1\rho_2 \in \Delta(\mathcal{O})$ (Wir erinnern uns, daß $\mathcal{O}$ der kleinste Doppelkegel ist, der $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ enthält). Nun können wir unitäre Intertwiner $(\widehat{\rho}_1|U_1|\rho_1)$, $(\widehat{\rho}_2|U_2|\rho_2)$, mit $\widehat{\rho}_1 \in \Delta(\widehat{\mathcal{O}}_1)$, $\widehat{\rho}_2 \in \Delta(\widehat{\mathcal{O}}_2)$ wählen, so daß $\widehat{\mathcal{O}}_1 \between \widehat{\mathcal{O}}_2$, $\widehat{\mathcal{O}}_1 \between \mathcal{O}$, $\widehat{\mathcal{O}}_2 \between \mathcal{O}$ und wenn $\widehat{\mathcal{O}}$ das Lokalisierungsgebiet von $\widehat{\rho}_1\widehat{\rho}_2$ bezeichnet $\widehat{\mathcal{O}} \between \mathcal{O}$ gilt. Dann sind nach Definition (7.1) $\varepsilon_{\rho_1} = U_1^{-1}\rho_1(U_1)$, $\varepsilon_{\rho_2} = U_2^{-1}\rho_2(U_2)$ und $\varepsilon_{\rho_1\rho_2} = \rho_1(U_2)^{-1}U_1^{-1}\rho_1\rho_2(U_1\rho_1(U_2))$.



In mehr als $1+1$ Dimensionen können wir die Lokalisierungsgebiete sogar so wählen, daß $\widehat{\rho}_1(U_2) = U_2$ und $\widehat{\rho}_2(U_1) = U_1$ gilt. Weiter rechnen wir aus:

$$U_2\rho_2(\phi_1(\varepsilon_{\rho_1})) = U_2\rho_2(\phi_1(U_1^{-1}))\rho_2(U_1) = \widehat{\rho}_2(\phi_1(U_1^{-1}))U_1U_2 = \phi_1(U_1^{-1})U_1U_2 = \phi_1(\varepsilon_{\rho_1})U_2\,,$$

wobei wir im vorletzten Schritt Bem.8.2ii) benutzt haben. Setzt man also $\Lambda_1 \equiv \phi_1(\varepsilon_{\rho_1})$, $\Lambda_2 \equiv \phi_2(\varepsilon_{\rho_2})$, so gilt $\Lambda_1 U_2 = U_2\rho_2(\Lambda_1)$ und genausoleicht rechnet man $\Lambda_2 U_1 = U_1\rho_1(\Lambda_2)$ aus. Damit wird

$$\begin{aligned}\phi_2\phi_1(\varepsilon_{\rho_1\rho_2}) &= \phi_2\phi_1(\rho_1(U_2)^{-1}U_1^{-1}\rho_1\rho_2(U_1\rho_1(U_2))) = \phi_2(U_2^{-1}\phi_1(U_1^{-1}))U_1\rho_1(U_2) = \\ &= \phi_2(U_2^{-1}\phi_1(U_1^{-1}\rho_1(U_1))U_1^{-1})U_1\rho_1(U_2) = \phi_2(U_2^{-1}\Lambda_1U_1^{-1})U_1\rho_1(U_2) = \\ &= \phi_2(\rho_2(\Lambda_1)U_2^{-1}U_1^{-1})U_1\rho_1(U_2) = \Lambda_1\phi_2(U_2^{-1}U_1^{-1})U_1\rho_1(U_2) = \\ &= \Lambda_1\phi_2(U_2^{-1}U_1^{-1})U_2U_1 = \Lambda_1\phi_2(U_2^{-1}\widehat{\rho}_2(U_1^{-1}))U_1 = \Lambda_1\phi_2(\rho_2(U_1^{-1})U_2^{-1})U_1 = \\ &= \Lambda_1U_1^{-1}\phi_2(U_2^{-1})U_1 = \Lambda_1U_1^{-1}\Lambda_2U_1 = \Lambda_1\rho_1(\Lambda_2)\,,\end{aligned}$$

und das ist die behauptete Gleichung. ■

Mit Hilfe der Standard-Linksinversen können wir nun den Begriff der statistischen Dimension eines Sektors verallgemeinern.

Definition 11.18 *Sei ϕ eine Standard-Linksinverse von $\rho\in\Delta_{\mathrm{fin}}$. Dann heißt*

$$d_\rho \equiv \|\phi(\varepsilon_\rho)\|^{-1}\,, \tag{11.11}$$

statistische Dimension *des Sektors $[\rho]$.*

Nun müssen wir natürlich zeigen, daß diese Definiton überhaupt wohl ist. Dabei werden wir zugleich ein tieferes Verständnis der Struktur finiter reduzibler Morphismen gewinnen.

Bemerkung 11.19 *i) Sei $\rho\in\Delta_{\mathrm{fin}}$ und $E\in\rho(\mathfrak{A})'$ ein selbstadjungierter Projektor. Dann gilt*

$$\phi(E) \geq d_\rho^{-2}\cdot \mathbb{1}\,. \tag{11.12}$$

ii) ρ ist eine direkte Summe von höchstens d_ρ^2 irreduziblen Morphismen mit finiter Statistik.

Beweis: i): Nach Definition ist d_ρ^2 eine obere Schranke aller Eigenwerte von $\phi(\varepsilon_\rho)$. Die Aussage folgt dann für jeden beliebigen Projektor aus Satz 11.2. ■

Bemerkung 11.20 *Für $\rho_i\in\Delta_{\mathrm{fin}}$, $i=1,\,\ldots,\,n$ gilt*

$$d_{\rho_1\,\ldots\,\rho_n} = d_{\rho_1}\cdot\,\ldots\,\cdot d_{\rho_n}\,. \tag{11.13}$$

Beweis: Klar nach Lemma 11.17 un den Definitonen. ■

Wir wissen schon, daß die durch (11.2) definierte Linksinverse einer direkten Summe nach Bem.11.14 standard gewählt werden kann. Dasselbe wollen wir nun für die Linksinverse von Unterdarstellungen aus (11.4) zeigen.

Lemma 11.21 *Sei $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$ und $E = VV^* \in (\rho|\rho)$ ein selbstadjungierter Projektor und ϕ eine Standard-Linksinverse von ρ.*

i) $\phi(\varepsilon_\rho)$ liegt im Zentrum von $\rho(\mathfrak{A})'$: $\phi(\varepsilon_\rho) \in \rho(\mathfrak{A})' \cap \rho(\mathfrak{A})'' = \mathcal{Z}(\rho(\mathfrak{A})')$.

ii) Die durch (11.4) definierte Linksinverse $\phi_{\rho|_E}$ von $\rho|_E$ ist standard.

Beweis: Da für $\sigma \in \Delta_{\text{irr}}$ die Größe $\phi(\varepsilon_\sigma) = \lambda_\sigma$ eine Invariante des Sektors σ ist (nach Korollar 9.5), müssen zu verschiedenen Eigenwerten von $\phi(\varepsilon_\rho)$ inäquivalente Darstellungen von $\mathfrak{A}$ gehören. Das heißt, jede Ausreduktion von $\phi(\varepsilon_\rho)$ ist zugleich Ausreduktion der Darstellung $\pi_0 \circ \rho$. Also gilt i). Für die Linksinverse (11.4) der Unterdarstellung $\rho|_E$ rechenen wir nach:

$$\begin{aligned}\phi_{\rho|_E}(\varepsilon_{\rho|_E})\phi_{\rho|_E}(\varepsilon_{\rho|_E})^* &= V^*\phi(\varepsilon_\rho)VV^*\phi(\varepsilon_\rho)^*V = V^*\phi(\varepsilon_\rho)E\phi(\varepsilon_\rho)^*V = \\ &= V^*\phi(\varepsilon_\rho)\phi(\varepsilon_\rho)^*V = \phi(\varepsilon_\rho)\phi(\varepsilon_\rho)^* \in \mathbb{C}\cdot\mathbb{1},\end{aligned}$$

mit (11.5), wobei wir im vorletzten Schritt i) verwendet haben. ■

Satz 11.22 *Sei $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$ und $E = VV^* \in (\rho|\rho)$ ein selbstadjungierter Projektor. Dann gilt*

$$\phi(E) = \frac{d_{\rho|_E}}{d_\rho} \cdot \mathbb{1}, \tag{11.14}$$

für eine beliebige Standard-Linksinverse ϕ von ρ.

Beweis: Wir beweisen die Aussage zunächst für Projektoren auf irreduzible Komponenten. Sei $E_i = V_i V_i^*$ ein solcher Projektor auf die Komponente $\rho_i \in \Delta_{\text{fin}} \cap \Delta_{\text{irr}}$ der Zerlegung aus Korollar 11.10i). Dann sei wie in (11.4) die nach Thm.9.7i) eindeutig bestimmte Linksinverse ϕ_{ρ_i} von ρ_i definiert (diese ist trivialerweise standard). Für einen geeigneten Eigenwert ω_{ρ_i} von $\phi(\varepsilon_\rho)\|\phi(\varepsilon_\rho)\|^{-1}$ gilt dann $\phi(\varepsilon_\rho)E_i = \omega_{\rho_i}/d_\rho \cdot E_i$ und damit

$$\lambda_{\rho_i} \cdot \mathbb{1} = \frac{\omega_{\rho_i}}{d_{\rho_i}} \cdot \mathbb{1} = \phi_{\rho_i}(\varepsilon_{\rho_i}) = \phi(E_i)^{-1}V_i^*\phi(\varepsilon_\rho)V_i = \phi(E_i)^{-1}V_i^*\phi(\varepsilon_\rho)E_iV_i = \phi(E_i)^{-1}\frac{\omega_{\rho_i}}{d_\rho},$$

mit (11.5). Daraus folgt

$$\phi(E_i) = \frac{d_{\rho_i}}{d_\rho} \cdot \mathbb{1}, \tag{11.15}$$

also (11.14) für solche Projektoren. Nun ist aber jeder Projektor in $\rho(\mathfrak{A})'$ eine Summe irreduzibler Projektoren und sowohl $\phi(.)$ wie d sind nach Definition additiv und daher gilt (11.14) allgemein, weil zudem nach dem vorhergegangenen Lemma die Linksinverse (11.4) jeder Unterdarstellung standard ist. ■

Korollar 11.23 *Seien alle Voraussetzungen wie im obigen Satz. Dann gilt*

i) $\phi(E)$ ist invariant unter unitären Transformationen:

$$\phi(E) = \phi(UEU^{-1}), \quad \forall U \in \rho(\mathfrak{A})'. \tag{11.16}$$

ii) $\phi(.)$ definiert einen treuen Spurzustand auf $\rho(\mathfrak{A})'$.

iii) Sei $\rho \cong \bigoplus_i \rho_i$ die Zerlegung von $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$ in irreduzible Komponenten. Dann gilt

$$d_\rho = \sum_i d_{\rho_i}. \tag{11.17}$$

iv) d_ρ *ist eine Invariante des Sektors* $[\rho]$.

v) Sind $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \Delta_{\text{fin}}$ *und ist* $\rho_1 \ldots \rho_n \cong \bigoplus_j \rho_j$ *die Zerlegung des Produkts* $\rho_1 \ldots \rho_n$ *in irreduzible Komponenten. Dann gilt folgende Summenregel:*

$$\prod_{i=1}^{n} d_{\rho_i} = \sum_j d_{\rho_j} . \tag{11.18}$$

Beweis: Es reicht offenbar, i) für einen Projektor E_i auf eine irreduzible Komponente zu zeigen, und für den ist die Invarianz klar wegen (11.14). Das reicht schon aus, um zu zeigen, daß ϕ durch lineare Fortsetzung einen Spurzustand auf $\rho(\mathfrak{A})'$ definiert. Treue folgt ebenso aus (11.14), denn $\phi(E_i) = 0$ gilt sicher nur, wenn $d_{\rho_i} = 0$ ist, was für $E_i \neq 0$ und $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$ unmöglich ist. iii): Summiert man (11.14) über alle Komponenten der Zerlegung von ρ in irreduzible Komponenten auf, so erhält man

$$\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1} = \frac{\sum_i d_{\rho_i}}{d_\rho} ,$$

woraus die behauptete Gleichung folgt. iv) folgt dann unmittelbar, denn die statistischen Parameter λ_{ρ_i} der $\rho_i \in \Delta_{\text{irr}} \cup \Delta_{\text{fin}}$ sind nach Korollar 9.5 eindeutig durch die Sektoren $[\rho_i]$ bestimmt. v) ist klar. ■

Die Klimax unserer Überlegungen zu reduziblen Morphismen ist der folgende Satz:

Satz und Definition 11.24 *Bezeichne* Δ_{fin} *die Menge aller kovarianten finiten Morphismen,* Δ_0 *sei definiert durch* $\Delta_0 \equiv \Delta_{\text{fin}} \cap \Delta_{\text{irr}}$. Δ_{fin} *ist abgeschlossen bezüglich direkter Summen, Unterdarstellungen und Produkten.*

Beweis: Nur zu Produkten sind noch einige Worte zu verlieren: Nach der Formel aus Lemma 11.17 ist $\phi_2 \circ \phi_1$ offenbar eine spezielle Linksinverse für $\rho_1\rho_2$, wenn diese finit sind, und damit ist auch das Produkt finit. ■

Es sei daran erinnert, daß — bis auf die Formel für das Produkt verallgemeinerter statistischer Parameter in Lemma 11.17 — alles, was wir in diesem Abschnitt hergeleitet haben auch in $1+1$ Dimensionen gilt, wie wir in §16 zeigen werden (für die eine Ausnahme werden wir dort ebenfalls Ersatz finden). Deshalb werden die Mengen Δ_{fin} und Δ_0 dort unser Arbeitsmaterial bilden (genauer gesagt die kleinste Untermenge von Δ_{fin} , die Δ_0 enthält und abgeschlossen ist bezüglich Produktbildung und Unterdarstellungen).

§12 Das Feldbündel

Auf dem Weg von der Beschreibung der superselection–Struktur der Observablenalgebra durch lokalisierte Morphismen zur Feldalgebra ist das sogenannte *Feldbündel* eine einfache Zwischenstufe. Von ihr zur Feldalgebra zu gelangen ist allerdings wie wir sahen ein nichttriviales Problem. Das Feldbündel hat aber schon viele formale Eigenschaften einer Feldalgebra und erweist sich als nützliches Konstrukt wenn einem nicht a priori eine Algebra von Feldern mit gegebenen Vertauschungsrelationen bei raumartigen Abständen bekannt ist.

Mittels lokalisierter Morphismen betrachten wir verschiedene Darstellungen von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{H}_0$. Das eigentliche Objekt mit physikalischer Bedeutung — nämlich ein *Zustand* auf $\mathfrak{A}$ ist also nur durch einen Vektor $\Psi \in \mathfrak{H}_0$ definiert, wenn man auch die zugehörige Darstellung spezifiziert, in der die Observablen auf ihn wirken.

Definition 12.1 *Ein Paar* $\mathbf{\Psi} \equiv \{\rho, \Psi\}$ *aus einem kovarianten lokalisierten Morphismus* ρ *und einem* $\Psi \in \mathfrak{H}_0$ *heißt* **(verallgemeinerter) Zustandsvektor**. *Das von den* $\{\rho, \Psi\}$ *gebildete triviale Vektorbündel heißt* **Zustands(vektor)bündel**, *bezeichnet durch* $\mathcal{H}$. *Seine Fasern werden mit* $\mathcal{H}_\rho$ *bezeichnet.*

Die Definition von „Feldern“ und ihrer Wirkung auf Zustandsvektoren ist natürlich:

Definition 12.2 *Sei* $\mathsf{B} \equiv \{\rho, B\}$ *ein Paar aus einem* $\rho \in \Delta$ *und einer Observable* $B \in \mathfrak{A}$. B *wirke auf Zustandsvektoren* $\mathbf{\Psi} = \{\rho', \Psi\}$ *durch*

$$\mathsf{B}.\mathbf{\Psi} \equiv \{\rho'\rho, \rho'(B)\Psi\} . \tag{12.1}$$

Die Menge aller so auf dem Zustandsbündel wirkender Operatoren wird mit $\mathcal{B}$ *bezeichnet. Das durch* $\mathcal{B}$ *gebildete triviale Vektorbündel mit typischer Faser* $\mathfrak{A}$ *heißt* **Feldbündel**. *Seine Fasern werden durch* $\mathcal{B}_\rho$ *bezeichnet.*

Observablen werden offenbar dargestellt durch $\{\iota, A\}$ mit $A \in \mathfrak{A}$.

Ebensoleicht führt man auf jeder Faser von $\mathcal{H}$ ein Skalarprodukt und über jeder Faser von $\mathcal{B}$ eine Norm ein:

Definition 12.3 *i) Seien* $\mathbf{\Phi} = \{\rho, \Phi\}$, $\mathbf{\Psi} = \{\rho, \Psi\} \in \mathcal{H}$. *Dann definiert*

$$(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}) \equiv \langle \Phi | \Psi \rangle , \tag{12.2}$$

ein Skalarprodukt in der Faser über ρ *von* $\mathcal{H}$, *wobei* $\langle \, . \, | \, . \, \rangle$ *das Skalarpodukt in* $\mathfrak{H}_0$ *bezeichnet.*

ii) Für $\mathsf{B} = \{\rho, B\}$ *definiert*

$$||\mathsf{B}|| \equiv ||B|| , \tag{12.3}$$

eine Norm in der Faser über ρ *von* $\mathcal{B}$.

Der Grundgedanke bei diesen Setzungen ist, daß die Fasern über ρ von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{B}$ die Physik im superselection-Sektor $[\rho]$ beschreiben. Daß das so ist, zeigt

Bemerkung 12.4 *Sei* $\mathsf{F} \in \mathcal{B}_\rho$, $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{B}_{\rho'\rho}$, $\mathbf{\Psi} \in \mathcal{B}_{\rho'}$. *Dann gilt*

$$(\mathbf{\Phi}, \mathsf{F}.\mathbf{\Psi}) = \langle \Phi | \rho'(F) \Psi \rangle . \tag{12.4}$$

Beweis: $(\mathbf{\Phi}, \mathsf{F}.\mathbf{\Psi}) = (\{\rho'\rho, \Phi\}, \{\rho, F\}.\{\rho', \Psi\}) = (\{\rho'\rho, \Phi\}, \{\rho'\rho, \rho'(F)\Psi\}) = \langle \Phi | \rho'(F) \Psi \rangle$. ∎

M.a.W. die Erwartungswerte von Feldern in der Faser über ρ' des Zustandsbündels sind gleich den Ewartungswerten von Feldern im Sektor $[\rho']$.

Aus (12.1) ergibt sich sofort die assoziative Verknüpfung für die Elemente von $\mathcal{B}$:

Bemerkung 12.5 *Seien* $\mathsf{B}_i = \{\rho_i, B_i\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, $i = 1, 2$. *Dann ist die Setzung*

$$\mathsf{B}_2\mathsf{B}_1 \equiv \{\rho_1\rho_2, \rho_1(B_2)B_1\}, \tag{12.5}$$

konsistent mit (12.1).

Beweis: Eine einfache Rechnung. ■

Die durch Feld– und Zustandsbündel gegebene Beschreibung der superselection-Struktur der Theorie ist stark redundant. Ist $U \in \mathfrak{A}$ unitär so besitzen $\{\rho, \Psi\}$ und $\{\sigma_U \circ \rho, U\Psi\}$ dieselbe physikalische Bedeutung — sie liegen in ein– und demselben Sektor. Ebenso müssen $\{\rho, B\}$ und $\{\sigma_U \circ \rho, UB\}$ physikalisch identifiziert werden. Dies führt zu einem neuen Verständnis der Funktion von Intertwinern. Sie beschreiben nun gerade diese Redundanz.

Definition 12.6 *Seien* $\boldsymbol{T} = (\rho_2|T|\rho_1)$, $\boldsymbol{\Psi} = \{\rho_1, \Psi\}$ *und* $\mathsf{B} = \{\rho_1, B\}$. *Die Wirkung von* $\boldsymbol{T}$ *in der Faser über* ρ_1 *des Zustands– sowie des Feldbündels ist definiert durch*

$$\boldsymbol{T}.\boldsymbol{\Psi} \equiv \{\rho_2, T\Psi\}, \tag{12.6i}$$

$$\boldsymbol{T} \circ \mathsf{B} \equiv \{\rho_2, TB\}. \tag{12.6ii}$$

Bemerkung 12.7 *Die oben definierte Norm auf* $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ *ist submultiplikativ, das heißt, es gilt*

$$\|\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\| \leq \|\mathsf{B}_1\|\,\|\mathsf{B}_2\|,$$

für alle B_1, $\mathsf{B}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$.

Beweis: Dies folgt aus Bem.5.9 und der Submultiplikativität der Norm auf $\mathfrak{H}_0$. ■

Ist T unitär, so ändert eine Anwendung von $\boldsymbol{T} = (\rho_2|T|\rho)$ auf ein $\boldsymbol{\Psi} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_\rho$ oder B nichts an deren physikalischer Bedeutung, denn dann ist für alle Observablen $\{\iota, A\}$:

$$(\{\rho_2, T\Phi\}, \mathsf{A}.\{\rho_2, T\Psi\}) = \langle T\Phi|\rho_2(A)T\Psi\rangle = \langle\Phi|T^*T\rho(A)\Psi\rangle = \langle\Phi|\rho(A)\Psi\rangle.$$

Wir können jetzt auch eine Darstellung der Poincarégruppe auf Zustands- und Feldbündel einführen:

Satz und Definition 12.8 *i) Durch*

$$\mathcal{P} \ni L \longmapsto U(L): \quad U(L).\{\rho, \Psi\} \equiv \{\rho, U_\rho(L)\Psi\}, \tag{12.7}$$

wird eine stark stetige, unitäre Darstellung der Poincarégruppe $\mathcal{P}$ *auf jeder Faser des Zustandsvektorbündels definiert;*

ii) Ebenso wird durch

$$\mathcal{P} \ni L \longmapsto \alpha_L: \quad \alpha_L.\{\rho, B\} \equiv \{\rho, X_L(\rho)^{-1}\alpha_L(B)\} = \{\rho, U_\rho(L)BU_0(L)^{-1}\}, \tag{12.8}$$

eine stark stetige, unitäre Darstellung von $\mathcal{P}$ *auf jeder Faser von* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *definiert. (Diese Darstellung kann als Erweiterung der Darstellung* α_L *auf* $\mathfrak{A}$ *angesehen werden und wird daher mit dem gleichen Symbol bezeichnet).*

Beweis: i) ist offensichtlich. ii) wird im ersten Teil folgender Bemerkung gezeigt. ■

Bemerkung 12.9 *Es gilt mit* $\mathsf{B} = \{\rho, B\}$, $\mathsf{B}_i = \{\rho_i, B_i\}$, $i = 1,\, 2$ *:*

$$\alpha_{L_1L_2}.\mathsf{B} = \alpha_{L_1}.(\alpha_{L_2}.\mathsf{B})\,, \tag{12.9i}$$

$$\alpha_L.(\mathsf{B}_2\mathsf{B}_2) = (\alpha_L.\mathsf{B}_2)(\alpha_L.\mathsf{B}_1)\,, \tag{12.9ii}$$

für alle L , L_1 , $L_2 \in \mathcal{P}$ *.*

Beweis: (12.9i) rechnet man mit (10.3) direkt nach:

$$\alpha_{L_1L_2}.\mathsf{B} = \{\rho, X_{L_1}(\rho)^{-1}\alpha_{L_1}(X_{L_2}(\rho)^{-1}\alpha_{L_2}(B))\} = \alpha_{L_1}.(\alpha_{L_2}.\mathsf{B})\,.$$

Schreibt man (12.9ii) aus, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\alpha_L.(\mathsf{B}_2\mathsf{B}_2) &= \{\rho_1\rho_2, X_L(\rho_1\rho_2)^{-1}\alpha_L(\rho_1(B_2))\alpha_L(B_1)\} = \\ &= \{\rho_1\rho_2, \rho_1(X_L(\rho_2)^{-1})X_L{\rho_1}^{-1}\alpha_L(\rho_1(B_2))\alpha_L(B_1)\}\,,\end{aligned}$$

mit (10.13). Nun gilt $X_L(\rho_1)^{-1}\alpha_L\rho_1(B_2) = X_L(\rho_1)^{-1}\alpha_L\rho_1\alpha_L^{-1}(\alpha_L(B_2)) = \rho_1\alpha_L(B_2)X_L(\rho_1)^{-1}$ (mit anderen Worten $X_L(\rho_1) \in (\alpha_L\rho_1|\rho_1\alpha_L)$), und damit folgt die Behauptung. ■

Während die erste Definition natürlich erscheint, bedarf die zweite einer Motivation. Zunächst könnte man ja $\mathcal{P}$ einfach durch $\alpha_L.\{\rho, B\} = \{\rho_L, \alpha_L(B)\}$ auf $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ wirken lassen, also die Lokalisierung von ρ und B „parallel“ verschieben. Das möchte man aber nicht, denn dann würde man die Faser ρ verlassen und hätte also gar keine *Darstellung* von $\mathcal{P}$. Deshalb geht man von $\{\rho_L, \alpha_L(B)\}$ mit dem Intertwiner $(\rho|X_L^{-1}|\rho_L)$ zurück in die Faser ρ und kommt so auf (12.8). Außerdem sind diese Definitionen konsistent mit der Kovarianzbedingung (5.4), wie folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 12.10 *Seien* $\mathsf{B} = \{\rho, B\}$, $\boldsymbol{\Psi} = \{\rho', \Psi\}$,*. Dann gilt:*

$$U(L).\mathsf{B}.\boldsymbol{\Psi} = \alpha_L.(\mathsf{B}).U(L).\boldsymbol{\Psi}\,, \tag{12.10}$$

für alle $L \in \mathcal{P}$ *.*

Beweis: Eine direkte Rechnung gibt:

$$\begin{aligned}U(L).\mathsf{B}.\boldsymbol{\Psi} &= U(L).\{\rho'\rho, \rho'(B)\Psi\} = \{\rho'\rho, U_{\rho'\rho}(L)\rho'(B)\Psi\} = \\ &= \{\rho'\rho, \rho'(X_L(\rho))^{-1}U_{\rho'}(L)\rho'(B)\Psi\} = \{\rho'\rho, \rho'(X_L(\rho)^{-1}\alpha_L(B))U_{\rho'}(L)\Psi\} = \\ &= \alpha_L.(\mathsf{B}).U(L).\boldsymbol{\Psi}\,,\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt (10.14) und im nächsten die Kovarianz von ρ' benutzt haben. ■

Wir sehen also, daß die obigen Definitionen eine Verallgemeinerung des Kovarianzbegriffs, wie er durch (5.4) gegben ist von Morphismen auf Felder bietet.

Um mit dem Formalismus vertraut zu werden, sei weiteren Überlegungen eine Aussage vorangestellt, die nur in diesem Kontext Sinn macht.

Bemerkung 12.11 *Intertwiner kommutieren mit Observablen. Damit ist für* $\boldsymbol{T} = (\rho|T|\gamma)$, $\mathsf{A} = \{\gamma, A\}$ *und* $\boldsymbol{\Psi} = \{\gamma, \Psi\}$, *gemeint, daß*

$$\boldsymbol{T} \circ \mathsf{A}.\boldsymbol{\Psi} = \mathsf{A}.(\boldsymbol{T}.\boldsymbol{\Psi}), \tag{12.11}$$

gilt.

Beweis: Schreibt man beide Seiten unter Zuhilfenahme der obigen Definitionen aus, so erhält man $\{\rho, T\gamma(A)\Psi\} = \{\rho, \rho(A)T\Psi\}$. Das ist nichts anderes als $T\gamma(A) = \rho(A)T$, also gerade die Bedingung, daß $\boldsymbol{T}$ ein Intertwiner von γ nach ρ ist. ■

Nun zur lokalen Struktur des Feldbündels.

Definition 12.12 $\mathsf{B} = \{\rho, B\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *heißt* **lokalisiert in** $\mathcal{O}$ *wenn* B *mit allen Observablen* $\{\iota, \mathfrak{A}\}$, $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$, *kommutiert. Die Menge der in* $\mathcal{O}$ *lokalisierten Elemente des Feldbündels wird mit* $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathcal{O})$ *bezeichnet.*

Satz 12.13 *Genau dann ist* $\mathsf{B} = \{\rho, B\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *in* $\mathcal{O}$ *lokalisiert, wenn ein unitärer Intertwiner* $\boldsymbol{U} = (\widehat{\rho}|U|\rho)$ *existiert, so daß* $\widehat{\rho} \in \Delta(\mathcal{O})$ *und* $UB \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ *sind.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“ Sei $\mathsf{A} = \{\iota, A\}$, $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$. Wenn ein unitärer Intertwiner $\boldsymbol{U} = (\widehat{\rho}|U|\rho)$ existiert, so daß $\widehat{\rho} \in \Delta(\mathcal{O})$, dann ist nach Voraussetzung $\{\rho, B\} = \{\rho, U^{-1}C\}$, mit geeignetem $C \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. $\mathsf{BA} = \mathsf{AB}$ ist nun äquivalent mit $BA = \rho(A)B$, oder $U^{-1}CA = \rho(A)U^{-1}C$. Nun ist $U^{-1} \in (\rho|\widehat{\rho})$, also $\rho(A)U^{-1}C = U^{-1}\widehat{\rho}(A)C = U^{-1}AC$, da $\widehat{\rho} \in \Delta(\mathcal{O})$, $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$. Nun gilt aber $CA = AC$ trivialerweise.

„$\Longleftarrow$“ Diese Richtung ist nicht ganz so trivial. Sei also $\mathsf{B} = \{\rho, B\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathcal{O})$, $\mathsf{A} = \{\iota, A\}$, $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$. Die Voraussetzung, daß A und B kommutieren ist dann nach (12.1) äquivalent mit

$$BA = \rho(A)B. \tag{12.12}$$

Sei nun $\boldsymbol{U} = (\widehat{\rho}|U|\rho)$ ein unitärer Intertwiner und $\widehat{\rho}$ lokalisiert in $\mathcal{O}$ (existiert wegen Transportabilität). Dann wird insbesondere $U^{-1}\widehat{\rho}(A)U = U^{-1}AU = \rho(A)$. Fügt man B von rechts an, so ergibt sich mit (12.12) $U^{-1}AUB = \rho(A)B = BA$, d.h. $AUB = UBA$. Da dies für alle $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ gilt folgt $UB \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$, letzteres mit der Haag-Dualität. Damit ist der Beweis vollständig. ■

Diese Äquivalenz benutzend, zeigt man nun leicht

Satz 12.14 $\alpha_L.\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathcal{O}) = \boldsymbol{\mathcal{B}}(L\mathcal{O})$.

Beweis: Sei $\mathsf{A} = \{\iota, A\}$ eine Observable mit $A \in \mathfrak{A}(L\mathcal{O}')$ und o.B.d.A. $\mathsf{B} = \{\rho, U^{-1}C\}$, mit $C \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$, $U \in (\widehat{\rho}|\rho)$, $\widehat{\rho} \in \Delta(\mathcal{O})$. Wir haben nur zu zeigen, daß $(\alpha_L.\mathsf{B})\mathsf{A} = \mathsf{A}(\alpha_L.\mathsf{B})$ gilt. Dies ist äquivalent zu

$$X_L(\rho)^{-1}\alpha_L(U^{-1}C)A = \rho(A)X_L(\rho)^{-1}\alpha_L(U^{-1}C).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich $X_L(\rho)^{-1}\rho_L(A)\alpha_L(U^{-1}C)$ und damit wird die Bedingung zu

$$\alpha_L(U^{-1}C\alpha_L^{-1}(A)) = \alpha_L(\rho(\alpha_L^{-1}(A))U^{-1}C).$$

Nun ist $\alpha_L^{-1}(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$, und deshalb haben wir dieselbe Situation erreicht, wie im ersten Teil des Beweises von Satz 12.13. Die Umkehrung ist klar wegen der Unitarität der Darstellung α_L. ■

Einige nützliche Rechenregeln erleuchten den Zusammenhang zwischen den Operationen des Feld- und Zustandsbündels und den Verknüpfungen der Intertwiner.

Satz 12.15 *Die folgenden Gleichungen gelten, wann immer die linke Seite definiert ist.*

$$(\boldsymbol{T}_1 \circ \boldsymbol{T}_2) \circ \mathsf{B} = \boldsymbol{T}_1 \circ (\boldsymbol{T}_2 \circ \mathsf{B}), \tag{12.13}$$

$$(\boldsymbol{T}_2 \circ \mathsf{B}_2)(\boldsymbol{T}_1 \circ \mathsf{B}_1) = (\boldsymbol{T}_1 \times \boldsymbol{T}_2) \circ (\mathsf{B}_2 \mathsf{B}_1), \tag{12.14}$$

$$\mathsf{B}.\boldsymbol{T}.\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{I}_\rho).\mathsf{B}.\boldsymbol{\Psi}, \quad \textit{wobei } \mathsf{B} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}_\rho, \tag{12.15}$$

$$\boldsymbol{T} \circ \mathsf{B}.\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{I}_\rho \times \boldsymbol{T}).\mathsf{B}.\boldsymbol{\Psi}, \quad \textit{wobei } \boldsymbol{\Psi} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}_\rho. \tag{12.16}$$

Beweis: (12.13) ist klar.
(12.14): Seien $\boldsymbol{T}_i = (\rho_i' | T_i | \rho_i)$, $\mathsf{B}_i = \{\rho_i, B_i\}$, $i = 1, 2$. Dann wird die linke Seite zu

$$\{\rho_2', T_2 B_2\}\{\rho_1, T_1 B_1\} = \{\rho_1' \rho_2', \rho_1'(T_2 B_2) T_1 B_1\},$$

und die rechte zu

$$\{\rho_1'\rho_2' | T_1 \rho_1(T_2) | \rho_1 \rho_2) \circ \{\rho_1 \rho_2, \rho_1(B_2) B_1\} = \{\rho_1'\rho_2', T_1 \rho_1(T_2) \rho_1(B_2) B_1\} = \{\rho_1'\rho_2', \rho_1'(T_2 B_2) T_1 B_1\}.$$

(12.15): Seien $\boldsymbol{T} = (\gamma' | T | \gamma)$, $\mathsf{B} = \{\rho, B\}$, $\boldsymbol{\Psi} = \{\gamma, \Psi\}$. Dann wird die linke Seite zu

$$\{\rho, B\}(\gamma' | T | \gamma).\{\gamma, \Psi\} = \{\rho, B\}\{\gamma', T\Psi\} = \{\gamma'\rho, \gamma'(B) T \Psi\},$$

und die rechte zu $(\gamma'\rho | T\gamma(\mathbb{1}) | \gamma\rho).\{\gamma\rho, \gamma(B)\Psi\} = \{\gamma'\rho, T\gamma(B)\Psi\} = \{\gamma'\rho, \gamma'(B) T\Psi\}$.
(12.16): Sei $\boldsymbol{\Psi} = \{\rho, \Psi\}$, $\mathsf{B} = \{\gamma, B\}$ $\boldsymbol{T} = (\gamma' | T | \gamma)$. Dann wird die linke Seite zu

$$((\gamma' | T | \gamma) \circ \{\gamma, B\}).\{\rho, \Psi\} = \{\gamma', TB\}.\{\rho, \Psi\} = \{\rho\gamma', \rho(TB)\Psi\},$$

und die rechte zu $(\rho\gamma' | \mathbb{1}\rho(T) | \rho\gamma).\{\rho\gamma, \rho(B)\Psi\} = \{\rho\gamma', \rho(TB)\Psi\}$. ■

Daß die „Felder“ von $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ tatsächlich etwas mit richtigen Feldoperatoren zu tun haben, zeigt sich an ihren Vertauschungseigenschaften.

Satz 12.16 *Seien* $\mathsf{B}_i = \{\rho_i, B_i\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$ *und* $\mathcal{O}_1 \between \mathcal{O}_2$. *Dann gilt*

$$\mathsf{B}_1 \mathsf{B}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}(\rho_1, \rho_2) \circ (\mathsf{B}_2 \mathsf{B}_1). \tag{12.17}$$

Beweis: Nach Voraussetzung existieren $\mathsf{B}_i' = \{\rho_i', B_i'\} = \boldsymbol{U}_i \circ \mathsf{B}_i$, so daß ρ_i' und B_i' in $\mathcal{O}_i$ lokalisiert sind und die $\boldsymbol{U}_i = (\rho_i' | U_i | \rho_i)$ unitäre Intertwiner sind. Dann gilt mit (12.14)

$$\mathsf{B}_i \mathsf{B}_j = (\boldsymbol{U}_i^* \circ \mathsf{B}_i')(\boldsymbol{U}_j^* \circ \mathsf{B}_j') = (\boldsymbol{U}_j^* \times \boldsymbol{U}_i^*) \circ \mathsf{B}_i' \mathsf{B}_j', \quad i \neq j.$$

Nun gilt unter den gegebenen Lokalisationsbedingungen $\mathsf{B}_i' \mathsf{B}_j' = \mathsf{B}_j' \mathsf{B}_i'$, nach (12.5) und $(\boldsymbol{U}_2^* \times \boldsymbol{U}_1^*) \circ (\boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2) = \boldsymbol{\varepsilon}_\tau(\rho_1, \rho_2)$ nach Theorem 7.6. Setzt man $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau(\rho_1, \rho_2)$ in (12.17) ein und wendet (12.13) an, folgt die Behauptung. ■

Wir werden dieses Ergebnis später auf $1 + 1$ Dimensionen verallgemeinern können. Dort hängt die Vertauschungsrelation von der genauen Anordnung der $\mathcal{O}_1$ $\mathcal{O}_2$ ab.

§13 Das Energiespektrum kovarianter Darstellungen

Als wesentliche Anwendung der Methoden des Feldbündels untersuchen wir das Energiespektrum kovarianter Morphismen, d.h. ihrer Darstellungen. Insbesondere wollen wir das Spektrum des Produkts $\rho_1\rho_2$ mit den Spektren der Faktoren vergleichen.

Die technischen Beweise dieser Resultate finden sich in [DHR74], hier seien nur die wesentlichen Ergebnisse zitiert.

Definition 13.1 *Für $\rho \in \Delta$ bezeichnen wir mit $S(\rho)$ daß* **Energiespektrum** *von ρ, d.h. daß gemeinsame Spektrum im $\mathbb{R}^4$ der Operatoren $(P_0, , \ldots, P_3)$, die Translationen im Sektor $[\rho]$ durch $U_\rho(x) = \mathrm{e}^{iP\cdot x}$ erzeugen.*

Lemma 13.2 *Sei $\mathsf{B}' = \{\rho, B'\}$ und sei f eine absolut integrable Funktion auf der Raumzeit $\mathcal{M}$, deren Fouriertransformierte*

$$\tilde{f} = \int_{\mathcal{M}} f(x)\mathrm{e}^{iq\cdot x}\,\mathrm{d}^4x\,,$$

Träger in einem offenen Gebiet $\mathcal{N}$ des Impulsraums hat. Sei weiter

$$\mathsf{B} \equiv \int_{\mathcal{M}} \alpha_x.\mathsf{B}'\, f(x)\,\mathrm{d}^4x\,.$$

Hat $\mathbf{\Psi} = \{\rho_1, \Psi\}$ Impulsträger in einer offenen Menge $\mathcal{N}_1$[1]), dann hat $\mathsf{B}.\mathbf{\Psi}$ Impulsträger in $\mathcal{N} + \mathcal{N}_1$. Ist weiterhin $\mathcal{N} \cap S(\rho)$ nichtleer, dann existiert ein $\mathsf{B}' = \{\rho, B'\}$, so daß $\mathsf{B}.\mathbf{\Omega} \neq 0$ mit $\mathbf{\Omega} = \{\iota, \Omega\}$.

Damit kann man nun das Additivitätstheorem der Spektren beweisen.

Theorem 13.3 *Seien ρ_1, $\rho_2 \in \Delta_0$, dann gilt*

$$S(\rho_1) + S(\rho_2) \subset S(\rho_1\rho_2)\,. \tag{13.1}$$

Ist weiterhin ρ der zu einer Unterdarstellung von $\rho_1\rho_2$ gehörige Morphismus, dann gilt sogar

$$S(\rho_1) + S(\rho_2) \subset S(\rho)\,. \tag{13.2}$$

Korollar 13.4 *Ist $\rho \in \Delta_0$, dann gilt $S(\rho) \subset \overline{V_+}$. Und dies gilt auch für Produkte von Morphismen aus Δ_0 und ihre Unterdarstellungen.*

§14 Ladungskonjugation II

Wir werden jetzt auf trickreiche Weise zeigen, daß zu einer Linksinverse ϕ für ρ immer ein Morphismus $\overline{\rho}$ gehört, den man als zu ρ *konjugiert* bezeichnet. Diese Begriffsbildung hängt eng mit der Existenz von Antiteilchen zusammen, was in [DHR74] genauer untersucht wurde als es hier geschehen kann.

[1])Das heißt, ist Ψ eine verallgemeinerter Eigenvektor der Impulsoperatoren zur Eigenwertmenge $\mathcal{N}_1$.

Definition 14.1 *Ein Morphismus $\overline{\rho}\in\Delta$ heißt* **konjugiert** *zu $\rho\in\Delta$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

i) Es existiert ein isometrischer Intertwiner $(\overline{\rho}\rho|R|\iota)$, d.h.

$$\overline{\rho}\rho(A)R = RA\,, \quad \forall A\in A\,. \tag{14.1}$$

(Mit anderen Worten, $\pi_0\circ\overline{\rho}\rho$ enthält die Vakuumdarstellung)

ii) $\overline{\rho}(\mathfrak{A})R\Omega$ ist dicht in $\mathfrak{H}_0$.

Bemerkung 14.2 *Ist $\overline{\rho}$ wie in obiger Definition, so gilt*

$$\phi_\rho(A) = R^*\overline{\rho}(A)R\,, \quad \forall A\in A\,, \tag{14.2}$$

für eine Linksinverse ϕ_ρ von ρ.

Beweis: Wenn ii) der Definition gilt, dann können wir (14.1) so anwenden: $R^*\overline{\rho}(\rho(A))R = R^*RA = A$, da $R^*R = \mathbb{1}$. Bezeichnet $E\in\overline{\rho}\rho(\mathfrak{A})'$ den selbstadjungierten Projektor RR^*, so rechnen wir weiter:

$$R^*\overline{\rho}(\rho(A)B\rho(C))R = R^*\overline{\rho}\rho(A)EBE\overline{\rho}\rho(C)R = R^*RAR^*\overline{\rho}(B)RC\,,$$

was die zweite Definitionseigenschaft einer Linksinversen zeigt. $\phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ ist klar. ∎

Nun zur Existenz konjugierter Morphismen (zunächst für irreduzible ρ).

Satz 14.3 *Genau dann existiert zu $\rho\in\Delta_{\mathrm{irr}}(\mathcal{O})$ ein konjugierter Morphismus $\overline{\rho}\in\Delta(\mathcal{O})$, wenn ρ sogar in $\Delta_0(\mathcal{O})$ ist, d.h. wenn ρ ein kovarianter lokalisierter Morphismus mit finiter Statistik ist. Dann ist die durch (14.2) definierte Linksinverse die eindeutig bestimmte Linksinverse von ρ.*

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Existiert ein $\overline{\rho}$, so ist für die durch (14.2) definierte Linksinverse $\phi(\varepsilon_\rho)\neq 0$. Dies folgt daraus, daß $\overline{\rho}$ als kovarianter Morphismus die Spektrumsbedingung erfüllt (nach Korollar 13.4).

„$\Longrightarrow$“: Wir beginnen dort, wo Satz 8.7 endete. Sei ϕ die eindeutig bestimmte Linksinverse von ρ, die nach Theorem 9.7 als Grenzwert einer Ladungstransferkette erhalten wurde. Dann bemerken wir, daß $\omega_0\circ\phi$ für $\rho\in\Delta_0$ nach (9.6i) ein treuer Zustand ist. Das bedeutet, daß die Bedingung ii) von Definition erfüllt ist für π_ϕ aus Satz 8.7: $\pi_\phi(\mathfrak{A})\xi = \pi_\phi(\mathfrak{A})R\Omega$ ist dicht in $\mathfrak{H}_0$. Man muß also den Operator V aus diesem Satz mit R aus der Definition identifizieren. Weiter sehen wir, daß durch $\mathcal{P}\ni L\mapsto U_{\pi_\phi}(L)\equiv\pi_\phi(U_\rho(L)))$ die unitäre Darstellung der Poincarégruppe , die in der Darstellung $\pi_\phi\circ\rho$ die Kovarianz implementiert gegeben ist:

$$\pi_\phi(U_\rho(L))\pi_\phi(\rho(A))\pi_\phi(U_\rho)^{-1} = \pi_\phi(U_\rho(L)\rho(A)U_\rho(L)^{-1}) = \pi_\phi\rho\circ\alpha_L(A)\,.$$

Diese Darstellung ist stark stetig, da π_ϕ nach Theorem 9.7iii) lokal normal ist (das ist dasselbe Argument wie in Lemma 10.7). Außerdem erfüllt sie die Spektrumsbedingung, da U_0 und nach Korollar 13.4 auch U_ρ dies tun. Für $A\in\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ reduziert sich nun (8.3ii) auf

$$U\pi_\phi(A)U^{-1} = \pi_0(A)\,,$$

wobei V^* als unitäre Abbildung U von $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}_\phi$ aus Satz 8.7 nach $\mathfrak{H}_0$ aufgefaßt wird. Daß ist aber nichts anderes, als daß DHR-Kriterium für π_ϕ und deshalb folgt mit Satz 5.5, daß

$\pi_\phi \cong \pi_0 \circ \overline{\rho}$ ist, mit dem in $\mathcal{O}$ lokalisierten Morphismus $\overline{\rho}(A) \equiv U^{-1}\pi_\phi(A)U$, $\forall A \in A$. (10.14) benutzend, ergibt sich weiterhin, daß $U_{\pi_\phi}(L) \equiv \pi_\phi(U_0(L)U_\rho(L)^{-1})U_{\pi_\phi\rho}(L)$ gilt. Da die Darstellungen U_ρ und $U_{\pi_\phi\rho}$ die Spektrumsbedingung erfüllen, muß dies nach (13.1) auch für U_{π_ϕ} gelten. Der Rest folgt, wenn man in Satz 8.7 V durch R ersetzt. Es bleibt, die Kovariamz von $\overline{\rho}$ zu zeigen. Das bleibt dem Lemma 14.5 überlassen. ■

Satz 14.4 *i) Der zu $\rho \in \Delta_0$ konjugierte Morphismus $\overline{\rho} \in \Delta_0$ ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

ii) $[\overline{\rho}\rho]$ enthält den Vakuumsektor genau einmal, das heißt $\dim(\overline{\rho}\rho|\iota) = 1$.

iii) ρ ist konjugiert zu $\overline{\rho}$ und zwar gilt:

$$\phi_{\overline{\rho}}(A) \equiv \overline{R}^* \rho(A)\overline{R}, \quad \forall A \in A, \quad \textit{mit} \quad \overline{R} \equiv \varepsilon(\overline{\rho}, \rho)R \in (\rho\overline{\rho}|\iota), \tag{14.3}$$

ist die eindeutig bestimmte Linksinverse von $\overline{\rho}$, wobei R wie in Def.14.1 ist.

iv) Es gilt:

$$\overline{\rho}(\overline{R})^* R = \lambda_\rho \cdot \mathbb{1} = \overline{R}^* \rho(R). \tag{14.4}$$

v) Die statistischen Parameter der Sektoren $[\rho]$ und $[\overline{\rho}]$ stimmen überein: $\lambda_\rho = \lambda_{\overline{\rho}}$.

Beweis: Daß die Definition iii) die Bedingungen für einen konjugierten Morphismus von $\overline{\rho}$ erfüllen, ist klar. Sei $\rho \in \Delta_0(\mathcal{O})$ und $\boldsymbol{U} = (\widehat{\rho}|U|\rho)$ ein unitärer Intertwiner mit $\widehat{\rho} \in \Delta_0(\widehat{\mathcal{O}})$, $\widehat{\mathcal{O}} \between \mathcal{O}$. Dann ist $\varepsilon_\rho = U^{-1}\rho(U)$, und wir rechnen für den statistischen Parameter λ_ρ aus:

$$\begin{aligned} \lambda_\rho \cdot \mathbb{1} = \phi_\rho(\varepsilon_\rho) = R^*\overline{\rho}(U^{-1}\rho(U))R = R^*\overline{\rho}(U^{-1})\overline{\rho}\rho(U)R = \\ = R^*\overline{\rho}(U^{-1})RU = R^*\overline{\rho}(U^{-1})U\rho(R) = R^*\varepsilon(\rho,\overline{\rho})\rho(R), \end{aligned} \tag{14.5}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Intertwinereigenschaft von U und die Tatsache benutzt haben, daß $R \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}')' = \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ gilt (wegen der Intertwinereigenschaft von R), d.h. daß $\widehat{\rho}(R) = R$ ist. Sei nun $\overline{\rho}' \in \Delta_0$ ein weiterer Morphismus, so daß ein isometrischer Intertwiner $R' \in (\overline{\rho}'\rho|\iota)$ existiert. Dann ist $\overline{\rho}'(\overline{R}^*)R' \in (\overline{\rho}'|\overline{\rho})$ ungleich null, denn $\overline{\rho}'(\overline{R}^*)R'R = \overline{\rho}'(\overline{R}^*\rho(R))R' = \lambda_\rho \cdot R' \neq 0$ (mit den gleichen Rechentechniken wie oben), und dieser Operator ist ein Vielfaches eines unitären Operators, da sowohl $\overline{\rho}$ als auch $\overline{\rho}'$ irreduzibel sind. Damit ist i) bewiesen. ii) ergibt sich nun so: Seien R_1 $R_2 \in (\overline{\rho}\rho|\iota)$ Isometrien, dann ist mit (14.5)

$$\lambda_\rho \cdot R_2 = \overline{\rho}(\lambda_\rho \cdot \mathbb{1})R_2 = \overline{\rho}(R_1^*\varepsilon(\overline{\rho},\rho)^*\rho(R_1))R_2 = \overline{\rho}(R_1^*\varepsilon(\overline{\rho},\rho)^*)R_2R_1.$$

Nun ist aber $\overline{\rho}(R_1^*\varepsilon(\overline{\rho},\rho)^*)R_2 \in (\iota\overline{\rho}|\overline{\rho}\iota) = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$ und daraus folgt, daß R_2 ein skalares Vielfaches von R_1 ist, wie behauptet. Durch genau dieselbe Rechnung wie in (14.5) erhält man

$$\lambda_{\overline{\rho}} \cdot \mathbb{1} = \overline{R}^*\varepsilon(\overline{\rho},\rho)\overline{\rho}(\overline{R}) = R^*\varepsilon(\overline{\rho},\rho)^{-1}\varepsilon(\overline{\rho},\rho)\overline{\rho}(\varepsilon(\overline{\rho},\rho)R) = R^*\overline{\rho}(\varepsilon(\overline{\rho},\rho)R), \tag{14.6}$$

mit der Definition von $\overline{R}$. Und damit wird, wenn R normiert gewählt ist:

$$\begin{aligned} \lambda_{\overline{\rho}} \cdot \mathbb{1} = (\lambda_{\overline{\rho}} \cdot \mathbb{1})^* = R^*(\lambda_{\overline{\rho}} \cdot \mathbb{1})^*R = R^*\overline{\rho}(R^*\varepsilon(\rho,\overline{\rho}))RR = R^*\overline{\rho}(R^*\varepsilon(\rho,\overline{\rho})))\overline{\rho}\rho(R)R = \\ = R^*\overline{\rho}(R^*\varepsilon(\rho,\overline{\rho})\rho(R))R = R^*\overline{\rho}(\lambda_\rho \cdot \mathbb{1})R = \lambda_\rho \cdot \mathbb{1}, \end{aligned}$$

was v) zeigt. iv) ist dann ebenfalls klar. ■

Lemma 14.5 *Der zu $\rho \in \Delta_0$ konjugierte Morphismus $\overline{\rho} \in \Delta_0$ ist tatsächlich kovariant und die Darstellung der Poincarégruppe im Sektor $[\overline{\rho}]$ ist gegeben durch*

$$U_{\overline{\rho}}(L) \equiv \lambda_\rho^{-1} \cdot \overline{\rho}(\alpha_L(\overline{R}^*)X_L(\rho))RU_0(L)\,. \tag{14.7}$$

Beweis: Die Idee hinter der Setzung (14.7) ist im Prinzip dieselbe wie die in Lemma 10.9 — nur daß man, wenn ρ kein Automorphismus ist, eben noch etwas mit den Isometrien herumoperieren muß. Zunächst zeigen wir die Intertwinereigenschaft $U_{\overline{\rho}}(L) \in (\overline{\rho}\alpha_L|\overline{\rho})$. Wir rechnen (unter Vernachlässigung des skalaren Faktors) für beliebiges $A \in \mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(\alpha_L(\overline{R}^*)X_L(\rho))RU_0(L)\overline{\rho}(A) &= \overline{\rho}(\alpha_L(\overline{R}^*)X_L(\rho)\rho(U_0(L))R\overline{\rho}(A) = \\ &= \overline{\rho}(\alpha_L(\overline{R}^*)X_L(\rho)\rho(U_0(L))\overline{\rho}\rho\overline{\rho}(A)R = \\ &= \overline{\rho}(\alpha_L(\overline{R}^*)X_L(\rho))\overline{\rho}\rho\alpha_L\overline{\rho}(A)\overline{\rho}\rho(U_0(L))R = \\ &= \overline{\rho}(\alpha_L(\overline{R}^*))\overline{\rho}\alpha_L\rho\alpha_L^{-1}\alpha_L\overline{\rho}(A)\overline{\rho}(X_L(\rho)\rho(U_0(L)))R = \\ &= \overline{\rho}\alpha_L(A)\overline{\rho}(\alpha_L(\overline{R}^*))X_L(\rho))RU_0(L)\,,\end{aligned}$$

unter Ausnutzung der verschiedenen Intertwinereigenschaften. Es bleibt zu zeigen, daß $U_{\overline{\rho}}(L)$ unitär ist (denn die starke Stetigkeit ist klar, da $X_L(\rho)$ und $U_0(L)$ stark stetig sind in L). Zunächst definieren wir einen isometrischen Intertwiner $R_L \equiv \overline{\rho}(X_L(\rho))R \in (\overline{\rho}\rho_L|\iota)$. Wähle nun ein unitäres $S \in (\overline{\rho}_L|\overline{\rho})$ (was immer möglich ist, da $\overline{\rho}_L$ im selben Sektor liegt wie $\overline{\rho}$). Dann ist $\overline{R}_L \equiv \rho_L(S^*)\alpha_L(\overline{R})$ ein isometrischer Intertwiner aus $(\rho_L\overline{\rho}_L|\iota)$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(\overline{R}_L^*)R_L &= \overline{\rho}((\alpha_L(\overline{R}^*)\rho_L(S)X_L(\rho))R = \\ &= \overline{\rho}((\alpha_L(\overline{R}^*)X_L(\rho))\overline{\rho}\rho(S)R = \overline{\rho}((\alpha_L(\overline{R}^*)X_L(\rho))RS = \lambda_\rho U_{\overline{\rho}}(L)S\,.\end{aligned}$$

Aber die linke Seite ist nach den Definitionen von R_L und $\overline{R}_L$ und nach Satz 14.4 iv) ein Skalar vom Betrag d_ρ und somit macht der Faktor λ_ρ^{-1} in $U_{\overline{\rho}}(L)$ dieses gerade unitär. ∎

Wir konstruieren nun noch konjugierte Morphismen für Produkte und Unterdarstellungen, wobei wir die in §11 entwickelten Methoden verwenden.

Bemerkung 14.6 *Sind $\rho_i \in \Delta_0$ mit konjugierten Morphismen $\overline{\rho}_i \in \Delta_0$, $i = 1, 2$ und zugehörigen Isometrien $R_i \in (\overline{\rho}_i\rho_i|\iota)$, so ist*

$$\overline{\rho_1\rho_2} \equiv \overline{\rho}_2\overline{\rho}_1\,, \tag{14.8}$$

konjugiert zu $\rho_1\rho_2 \in \Delta_{\text{fin}}$ und

$$\phi_{\rho_1\rho_2}(A) \equiv \phi_{\rho_2} \circ \phi_{\rho_1}(A) \equiv R_{12}^*\overline{\rho_1\rho_2}R_{12} \equiv R_2^*\overline{\rho}_2(R_1)^*\overline{\rho}_2\overline{\rho}_1(A)\overline{\rho}_2(R_1)R_2\,, \tag{14.9}$$

ist eine Linksinverse mit der Isometrie $R_{12} \in (\overline{\rho_1\rho_2}\rho_1\rho_2|\iota)$.

Beweis: Daß R_{12} eine Isometrie ist, gilt nach Bem.5.9. Alles übrige folgt aus Lemma 11.17. ∎

Satz 14.7 *Sei $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$, so daß ein konjugierter Morphismus $\overline{\rho} \in \Delta_{\text{fin}}$ existiert. Sei weiter $E = WW^*$ ein Projektor und $\rho|_E \in \Delta_0$ der zugehörige Morphismus, $\phi_{\rho|_E}$ die eindeutig bestimmte Linksinverse von $\rho|_E$.*

i) Der Zustand $\omega_0 \circ \phi_{\rho|_E}$ *wird erzeugt durch*

$$\xi_E \equiv \|\overline{\rho}(W)^* R\Omega\| \cdot \overline{\rho}(W^*) R\Omega\,. \tag{14.10}$$

ii) Sei $\overline{E}$ *die Projektion auf den von* $\overline{\rho}(\mathfrak{A})\xi_E$ *erzeugten abgeschlossenen Unterraum. Dann existiert eine Isometrie* $\overline{W}$ *mit* $\overline{W}\overline{W}^* = \overline{E}$ *und* $\overline{W} \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$*, wobei für* $\mathcal{O}$ *jeder Doppelkegel gesetzt werden kann, der das Lokalisierungsgebiet von* $\overline{\rho}$ *enthält. Dann ist*

$$\overline{\rho|_E}(A) \equiv \overline{W}^* \overline{\rho}(A) \overline{W}\,, \quad \forall A \in A\,, \tag{14.11}$$

konjugiert zu $\rho|_E$ *mit isometrischem Intertwiner*

$$R_E \equiv \phi(E)^{-1/2} \overline{W}^* \overline{\rho}(\overline{W}^*) R\,. \tag{14.12}$$

Beweis: i) ist klar nach (14.2), Satz 11.5ii) und dem Beweis von 14.3. Die erste Aussage von ii) ist einfach die Aussage der Borchers-Eigenschaft B (Axiom X). Bleibt nur noch zu zeigen, daß die Definitionen (14.11), (14.12) mit der Linksinversen $\phi_{\rho|_E}$ verträglich sind. Dazu rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} R_E^* \,\overline{\rho|_E}(A)\, R_E^* &= \phi(E)^{-1} R^* \overline{\rho}(\overline{W}) \overline{W}\overline{W}^* \overline{\rho}(A) \overline{W}\overline{W}^* \overline{\rho}(\overline{W}^*) R = \phi(E)^{-1} R^* \overline{E} \overline{\rho}(\overline{W} A \overline{W}^*) \overline{E} R = \\ &= \phi(E)^{-1} R^* \overline{\rho}(W A W^*) R = \phi_{\rho|_E}(A)\,, \quad \forall A \in A\,, \end{aligned}$$

(man beachte, daß $\phi(E) \in (\iota|\iota)$ ein reeller Skalar ist, da E ein selbstadjungierter Projektor ist) was zu zeigen war. ■

Mit der nun gesammelten Erfahrung scheint es sinvoll, die Menge der „interessanten“ Morphismen neu festzulegen:

Definition und Bemerkung 14.8 *Bezeichne* Δ_{S} *die kleinste Menge von Morphismen, die* Δ_0 *enthält und abgeschlossen ist unter Produktbildung und Unterdarstellungen. Nach den obigen Aussagen ist dies genau die Menge der finiten Morphismen, die Konjugierte besitzen.*

Mit dieser Menge werden wir später arbeiten, wenn wir Zopfgruppenstatistik untersuchen.

§15 Konjugation im Feldbündel

Wir werden in diesem kurzen Abschnitt das Konzept der Konjugation, das oben entwickelt wurde auf das Feldbündel übertragen und einige elementare Ergebnisse ableiten.

Definition 15.1 *Sei* $\rho \in \Delta_0$*,* $\overline{\rho}$ *der konjugierte Morphismus und* R *wie in Def.14.1. Dann setzen wir*

$$\mathsf{B}^\dagger \equiv \{\overline{\rho}, \lambda_\rho^{-1/2} \cdot \overline{\rho}(B)^* R\}\,. \tag{15.1}$$

für $\mathsf{B} = \{\rho, B\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}_\rho$*. Diese Definition erstreckt sich auf natürliche Weise auf Produkte und Unterdarstellungen.*

Bemerkung 15.2 *Mit obiger Definition ist*

$$\mathsf{B}^{\dagger\dagger} = \mathsf{B}\,. \tag{15.2}$$

Beweis: Wir rechnen

$$\mathsf{B}^{\dagger\dagger} = \{\rho, \rho(\lambda_{\rho}^{-1/2} \cdot \overline{\rho}(B)^* R)^* \lambda_{\overline{\rho}}^{-1/2} \overline{R}\} = \{\rho, \lambda_{\rho}^{-1} \cdot \rho(R)^* \overline{R} B\} = \mathsf{B}\,,$$

mit Satz 14.4iv). ■

Die Definition ist also gerade so gemacht, daß sich die statistischen Parameter wegheben.

Die Konjugation erhält Lokalität auf folgende Art:

Lemma 15.3 *Ist* $\mathsf{B} = \{\rho, B\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathcal{O})$ *so daß* ρ *einen konjugierten Morphismus* $\overline{\rho}$ *besitzt, dann ist* $\mathsf{B}^\dagger \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathcal{O}_1)$ *, wobei* $\mathcal{O}_1$ *ein beliebiger Doppelkegel ist, der* $\mathcal{O}$ *enthält.*

Beweis: Sei $\boldsymbol{U} = (\widehat{\rho}|U|\rho)$ ein unitärer Intertwiner mit $\widehat{\rho} \in \Delta(\mathcal{O})$. Dann ist leicht zu sehen, daß

$$(\boldsymbol{U} \circ \mathsf{B})^\dagger = \boldsymbol{U}^\dagger \circ \mathsf{B}^\dagger\,,$$

gilt, wobei $\boldsymbol{U}^\dagger = (\overline{\widehat{\rho}}|U^\dagger|\overline{\rho})$ ein unitärer Intertwiner und $\overline{\widehat{\rho}} \in \Delta(\mathcal{O})$ ist. Deshalb können wir o.B.d.A. annehmen, daß schon $\rho \in \Delta(\mathcal{O})$, $B \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ gilt. Dann ist die Behauptung klar, da auch $\overline{\rho} \in \Delta(\mathcal{O})$ ist und $R \in \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ gewählt werden kann (nach Satz 14.3 und Def.14.1). ■

Und im Skalarprodukt wirkt die Konjugation so:

Satz 15.4 *Sei* $\mathsf{B} = \{\rho, B\}$ *. Dann gilt*

$$(\mathsf{B}.\boldsymbol{\Phi}, \Psi) = (\lambda_{\overline{\rho}}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{I}_{\rho'} \times \overline{\boldsymbol{R}}.\boldsymbol{\Phi}, \mathsf{B}^\dagger \boldsymbol{\Psi})\,, \tag{15.3}$$

für $\boldsymbol{\Phi} = \{\rho', \Phi\}$, $\boldsymbol{\Psi} = \{\rho'\rho, \Psi\}$.

Beweis: Direkte Rechnung mit den Definitionen gibt

$$\begin{aligned}(\lambda_{\overline{\rho}}^{-1/2} \cdot \boldsymbol{I}_{\rho'} \times \overline{\boldsymbol{R}}.\boldsymbol{\Phi}, \mathsf{B}^\dagger \boldsymbol{\Psi}) &= \lambda_{\overline{\rho}}^{-1/2} \langle \rho'(\overline{R}\Phi, \lambda_{\rho}^{-1/2} \rho'\rho\overline{\rho}(B^*)\rho'\rho(R)\Psi\rangle = \\ &= \lambda_{\overline{\rho}}^{-1} \langle \Phi, \rho'(\overline{R}^* \rho\overline{\rho}(B^*)\rho(R))\Psi\rangle = \lambda_{\overline{\rho}}^{-1} \langle \Phi, \rho'(B^*)\rho'(\overline{R}^* \rho(R))\Psi\rangle \\ &= \langle \Phi, \rho'(B^*)\Psi\rangle = (\mathsf{B}.\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi})\,.\end{aligned}$$

■

Schließlich ist sie auch mit der Wirkung der Poincarégruppe verträglich.

Satz 15.5 *Für* $\mathsf{B} = \{\rho, B\}$ *gilt*

$$\alpha_L.\mathsf{B}^\dagger = (\alpha_L.\mathsf{B})^\dagger\,. \tag{15.4}$$

Beweis: Zunächst ist

$$(\alpha_L.\mathsf{B})^\dagger = \{\overline{\rho}, \lambda_{\rho}^{-1/2} \cdot \overline{\rho}(\alpha_L(B^*)X_L(\rho))R\} = \{\overline{\rho}, \lambda_{\rho}^{-1/2} \cdot U_{\overline{\rho}}(L)\overline{\rho}(B^*)U_{\overline{\rho}}(L)^{-1}\overline{\rho}(X_L(\rho))R\}\,,$$

mit (12.8) und der Kovarianzbedingung (5.4) für $\overline{\rho}$. Nun wissen wir aber, daß mit Satz 11.9iii) und (10.14)

$$RU_0(L) = U_{\overline{\rho}\rho}(L)R = \overline{\rho}(X_L(\rho))^{-1}U_{\overline{\rho}}(L)R\,,$$

gilt. Damit haben wir

$$(\alpha_L.\mathsf{B})^\dagger = \{\overline{\rho}, \lambda_{\rho}^{-1/2} \cdot U_{\overline{\rho}}(L)\overline{\rho}(B^*)RU_0(L)^{-1}\} = \alpha_L.\mathsf{B}^\dagger\,,$$

mit (12.8). ■

KAPITEL III

Zopfgruppenstatistik

Überblick

Wie im letzten Kapitel schon erklärt findet man in niederdimensionalen Räumen eine gänzlich andere Sektoren-Statistik vor, als die oben dargestellte Permutationsgruppenstatistik. In §16 sehen wir dies am Beispiel einer AQFT mit DHR-Lokalisierungsbedingung, d.h. in Doppelkegeln lokalisierten Morphismen. Da das raumartige Komplement eines Doppelkegels in einer zweidimensionalen Raumzeit zweifach zusammenhängend ist, findet man für die Vertauschung zweier lokalisierter Morphismen zwei verschiedene statistische Operatoren, bezeichnet mit ε^+ und ε^-. Diese Intertwiner erfüllen die von der Zopfgruppe wohlbekannte *Artin-Relation* und am Ende des Abschnitts definieren wir auf ihnen eine Darstellung der Zopfgruppe. Schließlich wird gezeigt, wie man mit den Zopf-Intertwinern graphisch umgeht und daß das Konzept der Linksinversen und der konjugierten Morphismen genauso wie im letzten Kapitel angewendet werden kann.

In §17 wird beispielhaft gezeigt, wie man aus der Sektoren-Statistik einer AQFT sogenannte *Verkettungs-Invarianten* gewinnen kann. Und zwar definieren wir mithilfe der Linksinversen eine *Markov-Spur* auf der Gruppenalgebra $C^*(B_\infty)$ der Zopfgruppe.

Schon in §11 hatte sich angedeutet, daß die Ausreduktion von Morphsimen wesentliche Erkenntnisse über die Struktur der Sektoren liefern kann. Die formalen Grundlagen dazu werden in §18 eingeführt: Wir definieren zunächst Referenzmengen irreduzibler Morphismen, die im folgenden das „Arbeitsmaterial“ bilden werden. Die Ausreduktion eines Produkts zweier irreduzibler Sektoren $[\rho_\mathrm{I}\rho_\mathrm{J}]$ in irreduzible $[\rho_\mathrm{K}$ wird durch die sogenannte *Inzidenzmatrix* $N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}}$ beschrieben. Elemente dieser Matrizen sind die Dimensionen der Intertwinerräume $(\rho_\mathrm{I}\rho_\mathrm{J}|\rho_\mathrm{K})$. Diese Zahl gibt die Vielfachheit an, mit der der Sektor $[\rho_\mathrm{K}]$ im Produkt der beiden anderen vorkommt. Für diese Intertwinerräume werden Orthonormalbasen von Isometrien ausgewählt, nachdem zuvor das für das folgende entscheidend wichtige Konzept der *superselection-Kanäle* eingeführt wurde.

Dieses Konzept und die isometrischen Basen werden dann dazu benutzt, um in §19 die Zopfung von Morphismen durch *skalare* Größen zu charakterisieren. Matrixelemente der *Zopf-* und *Fusionsmatrizen* werden gebildet, indem man Zopf- und Fusionsintertwiner in den Basen der Fusionsräume ausdrückt. Indizes dieser Matrizen sind dann superselection-Kanäle. Sie erfüllen, wie in §20 gezeigt wird, etliche polynomiale Relationen die man von konformen Feldtheorien und Quantengruppen her kennt, die aber tatsächlich ein allgemeines Merkmal von Theorien mit Zopfgruppenstatistik sind.

Die superselection-Kanäle, die aus „Quell-“, „Ladungs-“ und „Zielsektor“ bestehen, bieten nun den physikalisch und mathematisch richtigen Ansatz, um eine Feldalgebra zu rekonstruieren. In §21 führen wir das sogenannte *reduzierte Feldbündel* ein, dessen typische Faser wie beim ursprünglichen Feldbündel die Observablenalgebra ist, dessen Basisraum aber von den Kanälen gebildet wird. Solche „geladenen" Felder vermitteln nun richtiggehend zwischen Quell- und Zielsektor. Fusion und Zopfung dieser Felder werden durch die in §19 definierten Matrizen vermittelt, wie es in einer Feldalgebra sein soll. Die Felder lassen sich sinnvoll lokalisieren und transformieren sich kovariant unter einer Darstellung der Poincarégruppe . In §22 führen wir dann verschiedene Operationen auf superselection-Kanälen ein und leiten technische Ergebnisse ab, die wir dann in §23 dazu verwenden, um im reduzierten Feldbündel drei *Kojugationen* zu definieren. Deren erste ist die *Operatoradjunktion*, die das reduzierte Feldbündel zu einer C*-Algebra macht. Die letzte kann man als *Ladungskonjugation* auffassen.

§16 Zopfgruppenstatistik in $1+1$ Dimensionen

Wir hatten in §7 gesehen, daß die statistischen Operatoren ε_ρ in einer zweidimensionalen Raumzeit nicht gänzlich unabhängig von der Wahl der Hilfskegel $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ sind. Das wollen wir uns nun genauer überlegen.

Betrachten wir dazu den Intertwiner $\boldsymbol{\varepsilon}(\rho_1,\rho_2)$, wobei ρ_1, ρ_2 in $\mathcal{O}_1$, resp. $\mathcal{O}_2$ lokalisiert seien. U_1 sei ein intertwining Operator von ρ_1 nach $\widehat{\rho}_1$, so daß $\widehat{\rho}_1$ in $\widehat{\mathcal{O}}_1$ lokalisiert ist, und dieser Doppelkegel soll in der rechten Zusammenhangskomponente des raumartigen Komplements von $\mathcal{O}_2$ liegen; wir führen dazu die Schreibweisen

$$\widehat{\mathcal{O}}_1 > \mathcal{O}_2 \quad \text{und} \quad \widehat{\rho}_1 > \rho_2\,, \tag{16.1}$$

ein. Unter diesen Umständen ist

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\rho_1,\rho_2) = (\rho_2\rho_1|\rho_2(U_1^{-1})U_1|\rho_1\rho_2)\,,$$

weil wir uns eine Bewegung von ρ_2 sparen können. Man kann nun im Prinzip $\widehat{\mathcal{O}}_1$ im ganzen rechten Teil von $\mathcal{O}_2'$ umherbewegen, ohne $\boldsymbol{\varepsilon}(\rho_1,\rho_2)$ zu ändern. Man kann aber nicht in die andere Zusammenhangskomponente von $\mathcal{O}_2'$ gelangen! Wir legen deshalb fest:

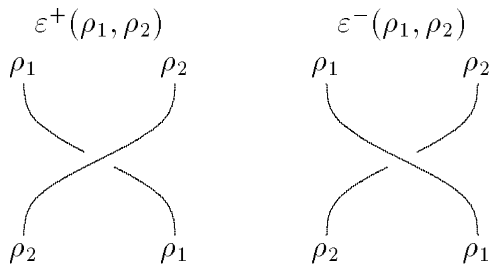
Definition 16.1 *Betrachte eine Raumzeit der Dimension zwei, und darin zwei lokalisierte Morphismen $\rho_1 \in \Delta(\mathcal{O}_1)$, $\rho_2 \in \Delta(\mathcal{O}_2)$. Ein statistischer Operator ε werde mit Hilfskegeln $\widehat{\mathcal{O}}_1$, resp. $\widehat{\mathcal{O}}_2$ konstruiert, so daß $\widehat{\mathcal{O}}_1 > \widehat{\mathcal{O}}_2$. Dann setzen wir*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1,\rho_2) \equiv (\rho_2\rho_1|\varepsilon^+(\rho_1,\rho_2)|\rho_1\rho_2) \equiv (\rho_2\rho_1|\varepsilon|\rho_1\rho_2)\,. \tag{16.2}$$

Andernfalls, d.h. wenn $\widehat{\mathcal{O}}_1 < \widehat{\mathcal{O}}_2$ ist, setzen wir

$$\boldsymbol{\varepsilon}^-(\rho_1,\rho_2) \equiv (\rho_2\rho_1|\varepsilon^-(\rho_1,\rho_2)|\rho_1\rho_2) \equiv (\rho_2\rho_1|\varepsilon|\rho_1\rho_2)\,. \tag{16.3}$$

Diese Intertwiner werden graphisch dargestellt durch



Aus dieser Setzung folgt sofort:

Bemerkung 16.2 *Sei* $\rho_i \in \Delta(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$. *Dann gilt:*

$$\varepsilon^{\pm}(\rho_1, \rho_2) = \mathbb{1} \quad \textit{für} \quad \begin{cases} \mathcal{O}_1 > \mathcal{O}_2 \\ \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2 \end{cases} . \tag{16.4}$$

Charakteristisch für den Unterschied zwischen Permutations- und Zopfgruppenstatistik ist, daß für $\mathcal{O}_1 > \mathcal{O}_2$ a priori nichts über $\varepsilon^-(\rho_1, \rho_2)$ und im anderen Fall nichts über $\varepsilon^+(\rho_1, \rho_2)$ gesagt werden kann. Wir können daher (16.4) als **Anfangsbedingung** der Zopfgruppenstatistik auffassen.

Mit der Definition hat man unmittelbar eine Verallgemeinerung von (12.17):

Bemerkung 16.3 *Seien* $\mathsf{B}_i = \{\rho_i, B_i\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$ *und* $\mathcal{O}_1 \big\backslash\!\!\big/ \mathcal{O}_2$. *Dann gilt*

$$\mathsf{B}_1 \mathsf{B}_2 = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_2) \circ \mathsf{B}_2 \mathsf{B}_1 & \textit{für } \mathcal{O}_1 > \mathcal{O}_2 \,, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^-(\rho_1, \rho_2) \circ \mathsf{B}_2 \mathsf{B}_1 & \textit{für } \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2 \,. \end{cases} \tag{16.5}$$

Die obige graphische Darstellung legt schon die Vermutung nahe, daß diese Intertwiner eine Darstellung der Zopfgruppe bilden. Das werden wir jetzt beweisen. Zunächst ist es aber angezeigt, die Zopfgruppe von n Strängen einzuführen.

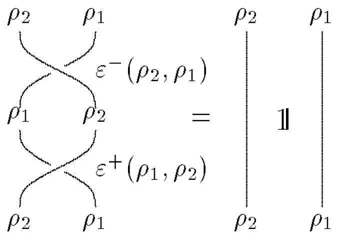
Definition 16.4 *Sei* B_n *die von Generatoren* $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ *erzeugte Gruppe mit den Relationen*

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \,, \quad \textit{für } |i - j| \geq 2 \,, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \,. \end{aligned} \tag{16.6}$$

B_n *heißt* **Zopfgruppe** *von* n *Strängen.*

Theorem 16.5 *Seien* $\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_2)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^-(\rho_1, \rho_2)$ *wie in obiger Definition. Dann gilt:*

i) $\boldsymbol{\varepsilon}^-(\rho_1, \rho_2) = \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_2, \rho_1)^{-1}$, *graphisch:*

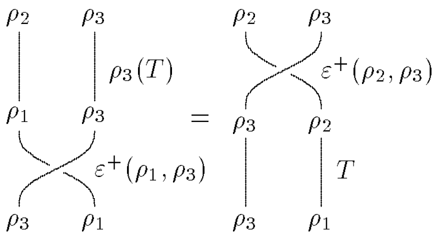


Man beachte die Analogie zu Satz 7.1iv).

ii) Ist $T \in (\rho_2|\rho_1)$, *so gilt*

$$\rho_3(\boldsymbol{T}) \circ \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_3) = \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_2, \rho_3) \circ \boldsymbol{T} \,, \tag{16.7i}$$

graphisch:



und

$$\rho_3(\boldsymbol{T}) \circ \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_3, \rho_1)^{-1} = \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_3, \rho_2)^{-1} \circ \boldsymbol{T}\,, \tag{16.7ii}$$

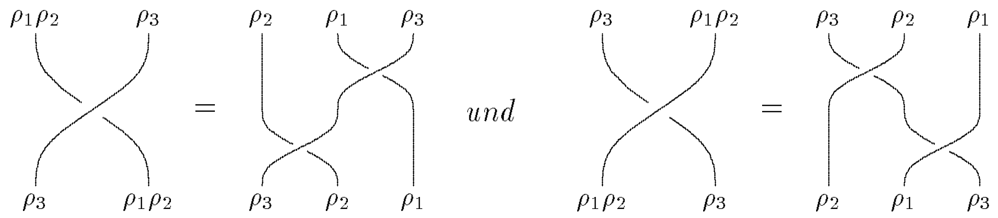
was graphisch ganz analog dargestellt wird.

iii) Weiter ist

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1\rho_2, \rho_3) = \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_3) \circ \rho_1(\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_2, \rho_3))\,, \tag{16.8i}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_3, \rho_1\rho_2) = \rho_1(\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_3, \rho_2)) \circ \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_3, \rho_1)\,, \tag{16.8ii}$$

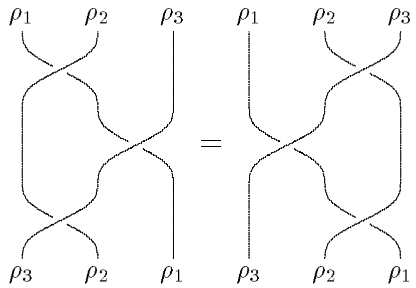
graphisch:



iv) Die $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ erfüllen die **Artin-Relation für gefärbte Zöpfe** *:*

$$\rho_3(\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_2)) \circ \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_3) \circ \rho_1(\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_2, \rho_3)) = \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_2, \rho_3) \circ \rho_2(\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_3)) \circ \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_2)\,, \tag{16.9}$$

graphisch:



v) Als unmittelbare Verallgemeinerung von ii) findet man

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1,\, \rho_2) \circ \boldsymbol{I}_{\rho_1} \times \boldsymbol{I}_{\rho_2} \times \boldsymbol{I}_{\rho_3} \times \ \ldots \times \boldsymbol{I}_{\rho_{i-1}} \times \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_i,\, \rho_{i+1}) = \\ \boldsymbol{I}_{\rho_2} \times \boldsymbol{I}_{\rho_1} \times \boldsymbol{I}_{\rho_3} \times \ \ldots \times \boldsymbol{I}_{\rho_{i-1}} \times \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_i,\, \rho_{i+1}) \circ \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1,\, \rho_2)\,, \end{aligned} \tag{16.10}$$

für $n > i \geq 3$.

vi) Die Relationen ii)—v) gelten analog auch für $\boldsymbol{\varepsilon}^-$.

Beweis: Zu i) überlegt man sich zunächst, daß man für U_1 o.B.d.A. auch Operatoren wählen kann, die Translationen $x \in \mathcal{P}$ im Sektor $[\rho]$ induzieren, also zum Beispiel, damit $\widehat{\mathcal{O}}_1 > \mathcal{O}_2$ wird, $U_1 = U_{\rho_1}(x)$ für hinreichend großes x. Wählt man x groß genug und wendet statt $U_{\rho_1}(x)$ $U_{\rho_1}(-x)$ an, so erhält man nach Definition $\boldsymbol{\varepsilon}^-(\rho_1, \rho_2)$. Aber andererseits ist $U_{\rho_1}(-x) = U_{\rho_1}(x)^{-1}$ (Darstellungseigenschaft der U_{ρ_1}) und damit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^-(\rho_1, \rho_2) &= (\rho_2\rho_1|U_{\rho_1}(-x)^{-1}\rho_2(U_{\rho_1}(-x))|\rho_1\rho_2) = (\rho_2\rho_1|U_{\rho_1}(x)\rho_2(U_{\rho_1}(x)^{-1})|\rho_1\rho_2) = \\ &= (\rho_2\rho_1|(\rho_2(U_{\rho_1}(x))U_{\rho_1}(x)^{-1})^{-1}|\rho_1\rho_2) = \boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_2, \rho_1)^{-1}\,. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt beruht darauf, daß man, statt $\mathcal{O}_2$ nach rechts zu verschieben, um $\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_2, \rho_1)$ zu erhalten, natürlich genausogut $\mathcal{O}_1$ nach links verschieben kann. Zu ii): Ähnlich wie in i) verschieben wir diesmal ρ_3: Sei $(\hat{\rho}_3|U_3|\rho_3)$ so gewählt, daß $\hat{\rho}_3 \in \Delta(\hat{\mathcal{O}}_3)$ und $\hat{\mathcal{O}}_3$ links von $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ liegt. Dann sind nach den vorangegangenen Überlegungen

$$\varepsilon^+(\rho_1, \rho_3) = U_3^{-1}\rho_1(U_3)\,, \quad \varepsilon^+(\rho_2, \rho_3) = U_3^{-1}\rho_2(U_3)\,.$$

Damit schreiben wir die linke Seite von (16.7i) als

$$\rho_3(T)U_3^{-1}\rho_1(U_3) = U_3^{-1}\hat{\rho}_3(T)\rho_1(U_3) = U_3^{-1}T\rho_1(U_3) = U_3^{-1}\rho_2(U_3)T\,,$$

und das ist gerade die rechte Seite. Die zweite Gleichheit gilt dabei, weil T nach Voraussetzung raumartig zu $\hat{\mathcal{O}}_3$ lokalisiert ist. Analog beweist man (16.7ii). Wählt man für iii) U_3 genauso wie für ii), dann hat man auch dieselben Darstellungen für $\varepsilon^+(\rho_1, \rho_3)$, $\varepsilon^+(\rho_2, \rho_3)$ und außerdem $\varepsilon^+(\rho_1\rho_2, \rho_3) = U_3^{-1}\rho_1\rho_2(U_3)$. Damit wird die rechte Seite von (16.8i) zu

$$U_3^{-1}\rho_1(U_3)\rho_1(U_3^{-1}\rho_2(U_3)) = U_3^{-1}\rho_1\rho_2(U_3)\,,$$

und das ist die linke Seite. iv) folgt auf folgende Weise aus ii) und iii): Ersetze in (16.7i) ρ_1 durch $\rho_1\rho_2$ und ρ_2 durch $\rho_2\rho_1$ und dann T durch $\varepsilon^+(\rho_1, \rho_2)$. Man erhält

$$\rho_3(\varepsilon^+(\rho_1, \rho_2))\varepsilon^+(\rho_1\rho_2, \rho_3) = \varepsilon^+(\rho_2\rho_1, \rho_3)\varepsilon^+(\rho_1, \rho_2)\,.$$

Anwendung von (16.8i) liefert (16.9). v) und vi) sind klar. ∎

Das sieht schon sehr nach Zopfgruppe aus, allerdings sind die Zöpfe hier noch „gefärbt". An sie ist nämlich noch der zugehörige Morphismus als „Farbe" angeheftet. Gefärbte Zöpfe bilden aber nur einen Gruppoid, denn die Verknüpfung ist nicht zwischen allen Elementen definiert, zum Beispiel kann man ja nicht zweimal hintereinander $\boldsymbol{\varepsilon}^+(\rho_1, \rho_2)$ anwenden.

Die Darstellung dieses Gruppoids sieht nun so aus: Die Generatoren σ_i der B_n werden repräsentiert durch

$$\sigma_i \longmapsto \varepsilon_{\sigma_i}(\rho_1\,, \,\ldots, \rho_n) \equiv \rho_1 \ldots \rho_{i-1}(\varepsilon^+(\rho_i,\, \rho_{i+1}))\,. \tag{16.11}$$

Bezeichnen wir nun mit π den natürlichen Homomorphismus von B_n nach $\mathbb{P}^{(n)}$ dann ergibt sich für die Verknüpfung zweier solcher Darstellungselemente

$$\varepsilon_{b_1 b_2}(\rho_1\,, \,\ldots, \rho_n) = \varepsilon_{b_1}(\rho_{\pi_2^{-1}(1)}\,, \,\ldots, \rho_{\pi_2^{-1}(n)})\varepsilon_{b_2}(\rho_1\,, \,\ldots, \rho_n)\,, \tag{16.12}$$

mit b_1 $b_2 \in B_n$ und $\pi_2 = \pi(b_2)$.

Von nun an werden wir statt der $\varepsilon^\pm$ der Einfachheit halber die Bezeichnungen dieser Darstellung verwenden, wenn wir es mit Zöpfen mit verschiedenen Morphismen zu tun haben.

Korollar 16.6 *Als Einfache Anwendung von Thm.16.5ii) sieht man, daß die Zopfgruppen-Entsprechung von Satz 7.9 gilt: Ist $b \in B_n$ und gelten ansonsten alle Voraussetzungen von Satz 7.9, dann gilt*

$$\boldsymbol{R}(\pi(b)) \circ \boldsymbol{\varepsilon}^\pm(\rho_1\,, \,\ldots, \rho_n) = \boldsymbol{\varepsilon}^\pm(\rho_1'\,, \,\ldots, \rho_n') \circ \boldsymbol{R}(e)\,. \tag{16.13}$$

Um zu einer Darstellung der Zopfgruppe zu kommen müssen wir genau wie in §7 den Blickwinkel etwas einschränken.

Satz und Definition 16.7 *Sei $\rho \in \Delta$. Setze*

$$\varepsilon_\rho \equiv \varepsilon^+(\rho,\rho) = \varepsilon^-(\rho,\rho)^{-1}. \tag{16.14}$$

Dann wird durch

$$B_n \ni \sigma_i \longmapsto \varepsilon_\rho^{(n)}(\sigma_i) \equiv \rho^{i-1}(\varepsilon_\rho), \tag{16.15}$$

eine (nicht notwendig treue) Darstellung der Zopfgruppe B_n auf dem Intertwinerraum $\rho^n(\mathfrak{A})'$ definiert.

Beweis: Zunächst ist die Gruppenoperation in der Darstellung $\varepsilon_\rho^{(n)}$ wohldefiniert, da die Verknüpfungsvorschrift aus Theorem 7.7iii) auch in zwei Dimensionen gilt, und die Darstellung des Inversen ist offensichtlich. Aus (16.9) folgt nun $\varepsilon_\rho\rho(\varepsilon_\rho)\varepsilon_\rho = \rho(\varepsilon_\rho)\varepsilon_\rho\rho(\varepsilon_\rho)$ und damit rechnet man die zweite Artin-Relation nach:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho^{(n)}(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) &= \rho^{i-1}(\varepsilon_\rho)\rho^i(\varepsilon_\rho)\rho^{i-1}(\varepsilon_\rho) = \rho^{i-1}(\varepsilon_\rho\rho(\varepsilon_\rho)\varepsilon_\rho) = \\ &= \rho^{i-1}(\rho(\varepsilon_\rho)\varepsilon_\rho\rho(\varepsilon_\rho)) = \rho^i(\varepsilon_\rho)\rho^{i-1}(\varepsilon_\rho)\rho^i(\varepsilon_\rho) = \varepsilon_\rho^{(n)}(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}).\end{aligned}$$

Weiter ist $\varepsilon_\rho \in \rho^2(\mathfrak{A})'$ und deshalb gilt für $k \geq 2$: $\varepsilon_\rho\rho^k(\varepsilon_\rho) = \rho^k(\varepsilon_\rho)\varepsilon_\rho$. Das liefert

$$\begin{aligned}\varepsilon_\rho^{(n)}(\sigma_i\sigma_{i+k}) &= \rho^{i-1}(\varepsilon_\rho)\rho^{i+k-1}(\varepsilon_\rho) = \rho^{i-1}(\varepsilon_\rho\rho^k(\varepsilon_\rho)) = \\ &= \rho^{i-1}(\rho^k(\varepsilon_\rho)\varepsilon_\rho) = \rho^{i+k-1}(\varepsilon_\rho)\rho^{i-1}(\varepsilon_\rho) = \varepsilon_\rho^{(n)}(\sigma_{i+k}\sigma_i),\end{aligned}$$

also die erste Artin-Relation. ■

In mehr als $1+1$ Dimensionen entartet diese Darstellung zu der Darstellung der Permutationsgruppe, die wir schon aus Korollar 7.10 kennen.

Stellen wir den charakteristischen Unterschied zwischen Zopf- und Permutationsgruppenstatistik, der schon in der Bemerkung nach Gleichung (16.4) angedeutet wurde, noch einmal klar heraus: Für $\rho_i \in \Delta(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$ und $\mathcal{O}_1 > \mathcal{O}_2$ wissen wir zwar aus der Anfangsbedingung, daß $\varepsilon^+(\rho_1,\rho_2) = \mathbb{1}$ ist, über $\varepsilon^-(\rho_1,\rho_2) = \varepsilon^+(\rho_2,\rho_1)^*$ wissen wir aber nichts. Das bedeutet, die Kombinationen

$$\varepsilon^+(\rho_2,\rho_1)\varepsilon^+(\rho_1,\rho_2) \quad \text{und} \quad \varepsilon^-(\rho_2,\rho_1)\varepsilon^-(\rho_1,\rho_2),$$

können nichttrivial sein, selbst wenn die Morphismen raumartig zueinander lokalisiert sind. Solche doppelten Zopfungen nennt man **Monodromieoperatoren**.

Versuchen wir nun, die wesentlichen Begriffe des letzten Kapitels zu retten.

Definition 16.8 *Für $\rho \in \Delta_{\mathrm{irr}}$ setzen wir*

$$\frac{\omega_\rho}{d_\rho} \equiv \lambda_\rho, \tag{16.16}$$

mit $|\omega_\rho| = 1$. $d_\rho \geq 1$ ist die **statistische Dimension** *aus §7 und ω_ρ heißt* **statistische Phase** *des Sektors $[\rho]$.*

Die statistische Phase verallgemeinert die Unterscheidung zwischen Bose- und Fermisektoren.

Für Automorphismen können wir eine Entsprechung von Lemma 7.2 ableiten, die uns einen ersten Eindruck von den Charakteristiken der Zopfgruppenstatistik gibt.

Lemma 16.9 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) ρ ist ein Automorphismus.

ii) ρ^2 ist irreduzibel.

iii) ε_ρ ist ein Skalar, und damit $\varepsilon_\rho = \lambda_\rho = \omega_\rho$.

iv) $d_\rho = 1$.

Beweis: i)$\Rightarrow$ii)$\Rightarrow$iii) folgt genauso wie in Lemma 7.2, wobei man noch beachten muß, daß ε_ρ unitär ist, woraus schließlich auch iv) folgt. Setzen wir nun iv) voraus und nehmen im Widerspruch zu iii) an, daß ε_ρ mehr als einen Eigenwert besitze, sage λ_1 , λ_2 . Dann ist mit $0 < \sigma < 1$ auch die konvexe Kombination $\sigma\lambda_1 + (1-\sigma)\lambda_2 = \sigma\omega_1 + (1-\sigma)\omega_2 < 1$ ein Eigenwert, im Gegensatz zur Voraussetzung, also gilt iii). iii)$\Rightarrow$i) zeigt man exakt wie in Lemma 7.2, wobei der Vorfaktor ± 1 zu ω_ρ verallgemeinert wird, was sich dann wieder weghebt. ■

Korollar 16.10 *Ist ρ ein Automorphismus, dann ist die Darstellung $\varepsilon_\rho^{(n)}$ der Zopfgruppe im Sektor $[\rho^n]$ abelsch.*

Beweis: Klar nach iii) des Lemmas. ■

Teilchen, die abelscher Zopgfgruppenstatistk genügen, d.h. bei denen in einfacher Verallgemeinerung der Permutationsgruppenstatistik bei Vertauschung Phasenfaktoren auftreten, haben in den letzten Jahren in der Festkörperphysik große Aufmerksamkeit gefunden. Wir übernehmen von dort die Bezeichnung „Anyon“ und nennen solche Sektoren **anyonisch**. Unser Interesse gilt aber auch den Sektoren, die nichtabelsche Darstellungen tragen. Diese nennen wir **plektonisch**.

Die Eindeutigkeit der Linksinversen, die wir für Permutationsgruppenstatistik gefunden hatten gilt hier weiterhin, aber wir müssen dafür natürlich einen anderen Beweis führen, der nicht von der expliziten Form des statistischen Parameters gebrauch macht. Dies und wie sich das Konzept der konjugierten Sektoren bei Zopfgruppenstatistik darstellt, beschreibt die nächste Bemerkung.

Bemerkung 16.11 *Sei $\rho \in \Delta_0$ und sei $\overline{\rho} \in \Delta_0$ der konjugierte Sektor. Dann gilt:*

i) $\phi(A) \equiv R^*\overline{\rho}(A)R$, $\forall A \in A$ ist die eindeutig bestimmte Linksinverse von ρ , sie ist insbesondere unabhängig von der Wahl der Isometrie $R \in (\overline{\rho}\rho|\iota)$.

ii) $\lambda_\rho = \lambda_{\overline{\rho}}$ und auch ansonsten gelten die Ergebnisse von Satz 14.4.

iii) λ_ρ ist eine Invariante des Sektors $[\rho]$.

Beweis: Gehen wir zurück zum Beweis von Satz 14.4 und sehen, welche Abweichungen auftreten. Beginnen wir in (14.5) mit ε_ρ^+ , d.h. wählen wir U so, daß $\widehat{\mathcal{O}} < \mathcal{O}$ gilt, dann erhalten wir am Ende der Rechnung

$$\lambda_\rho \cdot \mathbb{1} = \ \ldots = R^*\varepsilon^-(\rho,\overline{\rho})\rho(R) = R^*\varepsilon^+(\overline{\rho},\rho)^*\rho(R)$$

(mit Thm.16.5i)), denn nun wird der erste statt des zweiten Morphismus nach links verschoben. Damit kann man $\overline{R}$ genauso definieren wie in Satz 14.4, nämlich durch $\overline{R} \equiv \varepsilon^+(\overline{\rho},\rho)R$. Durch Austausch von ρ und $\overline{\rho}$ erhält man dann aber:

$$\lambda_{\overline{\rho}} \cdot \mathbb{1} = \overline{R}^* \varepsilon^-(\overline{\rho},\rho)\overline{\rho}(\overline{R}) = R^*\varepsilon^-(\rho,\overline{\rho})\varepsilon^-(\overline{\rho},\rho)\overline{\rho}(\varepsilon^+(\overline{\rho},\rho)R)\,,$$

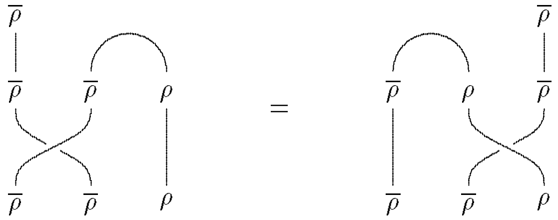
und damit können wir nichts anfangen, denn in der Mitte steht ein Monodromieoperator, über den wir nichts wissen. Rechnen wir also anders! Zunächst ist (wenn ϕ_ρ die Linksinverse von ρ bezeichnet und $\phi_{\overline{\rho}}$ entsprechend die von $\overline{\rho}$)

$$\lambda_{\overline{\rho}} \cdot \mathbb{1} = \phi_{\overline{\rho}}(\varepsilon^{\pm}_{\overline{\rho}}) = R^* \phi_{\overline{\rho}}(\varepsilon^{\pm}_{\overline{\rho}}) R\,,$$

da $R^*R = \mathbb{1}$ ist. Nun ist eine nichttriviale Verallgemeinerung von (16.7ii), daß

$$\overline{R}^* \rho(\varepsilon^{\pm}_{\overline{\rho}}) = \overline{\rho}(\overline{R}^*)\varepsilon^{+}(\overline{\rho}, \rho)\,, \tag{16.17}$$

gilt, was graphisch leicht einsichtig wird:



Damit können wir direkt nachrechnen:

$$\begin{aligned}\lambda_{\overline{\rho}} \cdot \mathbb{1} &= R^* \overline{R}^* \rho(\varepsilon^{\pm}_{\overline{\rho}}) \overline{R} R = R^* \overline{\rho}(\overline{R}^*) \varepsilon^{+}(\overline{\rho}, \rho)^* \overline{R} R = R^* \overline{\rho}(\overline{R}^*) R R = \\ &= \phi_\rho(\overline{R}^*) R = \phi_\rho(\overline{R}^* \rho(R)) = \phi_\rho(\lambda_\rho \cdot \mathbb{1}) = \lambda_\rho \cdot \mathbb{1}\,,\end{aligned}$$

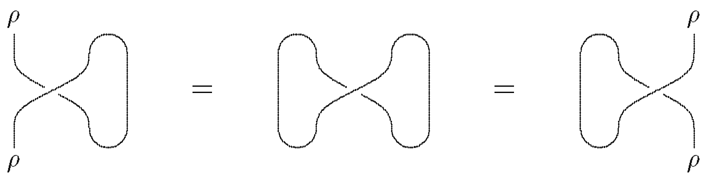
womit ii) fast gezeigt ist, denn auch Satz 14.4iii) und i) gelten mit unseren Definitionen weiter — es bleibt nur noch die Eindeutigkeit der Linksinversen zu zeigen: Wir können $A \in \mathfrak{A}$ schreiben als

$$A = |\lambda_\rho|^{-2} \rho(R^*) \overline{R} A \overline{R}^* \rho(R) = |\lambda_\rho|^{-2} \rho(R^*) \overline{R}\, \overline{R}^* \rho(\overline{\rho}(A) R)\,,$$

wobei wir die Intertwinereigenschaft von $\overline{R}^*$ benutzt haben. Sei nun ϕ' eine beliebige Linksinverse von ρ. Dann gilt $\phi'(A) = |\lambda_\rho|^{-2} R^* \phi(\overline{R}\, \overline{R}^*) \overline{\rho}(A) R$. Nun ist $\phi(\overline{R}\, \overline{R}^*) \in (\overline{\rho}|\overline{\rho})$ ein skalares Vielfaches der Identität und setzt man $A = \mathbb{1}$ so erhält man $\phi(\overline{R}\overline{R}^*) = |\lambda_\rho|^2$ und damit $\phi'(A) = R^* \overline{\rho}(A) R$, also die durch den konjugierten Sektor bestimmte Linksinverse und dieses Ergebnis ist offenbar unabhängig von der Wahl von R. iii): Wir wissen aus obiger Bemerkung, daß die Linksinverse ϕ für $\rho \in \Delta_0$ eindeutig bestimmt ist. Wählt man dann ein ρ' aus dem Sektor $[\rho]$, so zeigt die gleiche Rechnung wie am Ende des Beweises von Korollar 9.5, daß die Behauptung gilt. ■

Ebenso läßt sich daß in §11 entwickelte Konzept der Standard-Linksinversen für $\rho \in \Delta_{\mathrm{fin}}$ hier vollständig weiterverwenden, und man findet auch dieselben Konjugierten für Produkte und Unterdarstellungen, wie am Ende von §14 — uns stehen also alle wesentlichen Werkzeuge zur Verfügung, die wir auch bei der Untersuchung der Permutationsgruppenstatistik verwendeten.

Für $\rho \in \Delta_{\mathrm{irr}}$ haben wir nun eine aufschlußreiche graphische Darstellung des statistischen Parameters λ_ρ:



Dies gibt die Identitäten

$$\lambda_\rho = R^* \overline{\rho}(\varepsilon_\rho) R = \overline{R}^* \lambda_\rho \overline{R} = \rho(\overline{R}^*) \varepsilon_\rho \rho(\overline{R}) \,, \tag{16.18}$$

wieder, wobei man die letzte leicht einsieht, wenn man die Linksinverse ϕ_ρ auf sie anwendet

Als nächstes wollen wir Satz 11.17 verallgemeinern, wobei wir hier gleich Standard-Linksinverse verwenden.

Satz 16.12 *Sei ϕ eine Standard-Linksinverse von $\rho \in \Delta_{\mathrm{fin}}$ und ϕ_i seien Standard-Linksinverse für $\rho_i \in \Delta_0$, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt:*

i) $\phi\phi_1$ ist eine Standard-Linksinverse von $\rho_1\rho$ und es gilt

$$\phi\phi_1(\varepsilon_{\rho_1\rho}) = \lambda_{\rho_1} \varepsilon(\rho, \rho_1) \phi(\varepsilon_\rho) \varepsilon(\rho_1, \rho) \,. \tag{16.19}$$

ii) $\phi_n \ldots \phi_1$ ist eine Standard-Linksinverse für $\rho_1 \ldots \rho_n$, die

$$\phi_n \ldots \phi_1(\varepsilon_{\rho_1 \ldots \rho_n}) = \lambda_{\rho_1} \ldots \lambda_{\rho_n} \cdot \varepsilon_{C_n}(\rho_1, \ldots, \rho_n) \,, \tag{16.20}$$

erfüllt, wobei $C_n = (\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1})^n$ der Generator des Zentrums der Zopfgruppe B_n ist (siehe hierzu [Bir74], S. 28, Korollar 1.8.4).

Beweis: i): Nach (16.8i) und (16.8ii) finden wir

$$\varepsilon_{\rho_1\rho} = \varepsilon_{\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2}(\rho_1, \rho, \rho_1, \rho) = \rho_1(\varepsilon(\rho_1, \rho)) \rho_1^2(\varepsilon_\rho) \varepsilon_{\rho_1} \rho_1(\varepsilon(\rho, \rho_1)) \,.$$

Wendet man ϕ_1 an, so ergibt sich

$$\phi_1(\varepsilon_{\rho_1\rho}) = \varepsilon(\rho_1, \rho) \rho_1(\varepsilon_\rho) \phi_1(\varepsilon_{\rho_1}) \varepsilon(\rho, \rho_1) = \lambda_{\rho_1} \rho(\varepsilon(\rho, \rho_1)) \varepsilon_\rho \rho(\varepsilon(\rho, \rho_1)) \,,$$

unter Verwendung der Artin-Relation (16.9). Wendet man nun noch ϕ an, so ergibt sich sofort (16.19). Wegen der Unitarität der ε ist dann klar, daß $\phi\phi_1$ standard ist. ii): Zunächst ist auch $\phi_n \ldots \phi_1$ standard, was man bei wiederholter Anwendung von i) leicht sieht. (16.19) ist dann schon mal ein Induktionsanfang um (16.20) zu zeigen. Im Induktionsschritt von $n-1$ nach n benutzen wir wieder (16.19):

$$\phi_n \ldots \phi_2\phi_1(\varepsilon_{\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n}) = \lambda_{\rho_1}\lambda_{\rho_2} \ldots \lambda_{\rho_n} \varepsilon(\rho_2 \ldots \rho_n, \rho_1) \varepsilon_{C_{n-1}}(\rho_2, \ldots, \rho_n) \varepsilon(\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n) \,,$$

indem man dort $\rho = \rho_2 \ldots \rho_n$ setzt. Nun sind die zwei äußeren ε nichts anderes als

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho_2 \ldots \rho_n, \rho_1) &= \varepsilon_{\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}}(\rho_2, \ldots, \rho_n, \rho_1) \,, \\ \varepsilon(\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n) &= \varepsilon_{\sigma_{n-1} \ldots \sigma_1}(\rho_1, \ldots, \rho_n) \,. \end{aligned}$$

Wertet man alles unter Verwendung der Identität $C_n = \sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} C_{n-1} \sigma_{n-1} \ldots \sigma_1$ aus, so erhält man (16.20). ■

(16.20) ist in Fig.16.1 bildlich für $n = 3$ dargestellt. In jedem Schritt wird mit einer Linksinversen der am weitesten rechts stehende Strang „kurzgeschlossen“. und die resultierende Schleife wird unter Herausziehung eines λ-Faktors eliminiert. Übrig bleibt am Ende der „maximale Zopf“ C_n. Dank Formel (16.19) wissen wir nun auch, daß die Aussagen über statistische Dimensionen von Produkten (Korollar 11.23iii), iv) und v)) aus §11 weitergelten.

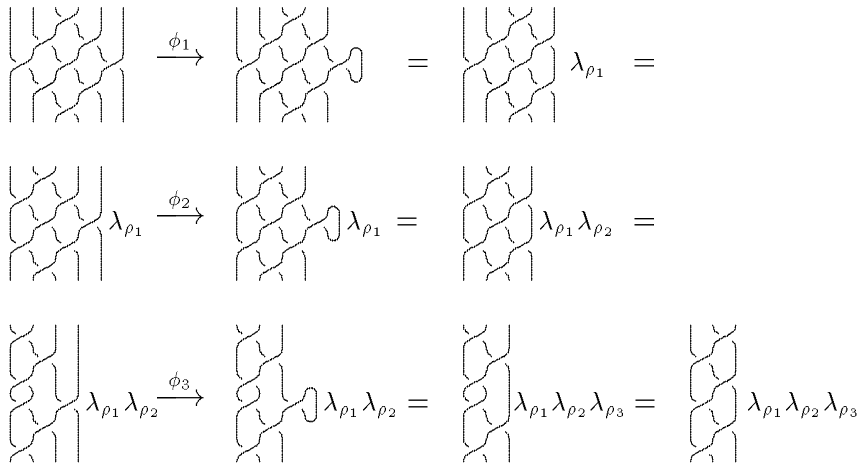


Fig. 16.1: Sukzessive Auswertung von ϕ_1 bis ϕ_3 auf $\varepsilon_{\rho_1\rho_2\rho_3}$.

§17 Die Markov-Spur

Wir können jetzt — in Verallgemeinerung von Satz 11.22 und Korollar 11.23 — einen Spurzustand auf $\bigcup_n \rho^n(\mathfrak{A})'$ definieren. Es zeigt sich, daß sich mit dieser Spur eine *Markov-Spur* auf auf der Guppenalgebra $C^*(B_\infty)$ der $B_\infty \equiv \bigcup_n B_n$ erzeugen läßt.

Theorem und Definition 17.1 *Sei ϕ eine Standard-Linksinverse von $\rho \in \Delta_{\text{fin}}$.*
i) Dann definiert

$$\rho^n(\mathfrak{A}) \ni E \longmapsto \varphi(E) \cdot \mathbb{1} \equiv \phi^n(E)\,, \tag{17.1}$$

einen treuen Spurzustand auf $\bigcup_n \rho^n(\mathfrak{A})'$. ii) Sei $\rho \in \Delta_{\text{irr}}$. Dann definiert

$$\mathrm{Tr}\,|B_n(\,.\,) \equiv \varphi \circ \varepsilon_\rho^{(n)}(\,.\,)\,, \tag{17.2}$$

eine nichtnegative **Markov-Spur** *auf der Gruppenalgebra $C^*(B_\infty)$, wobei B_n auf die natürliche Weise in B_{n+1} enthalten ist. Diese Markov-Spur erfüllt:*

$$\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)\,, \tag{MI}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(a\sigma_n) &= \lambda_\rho \,\mathrm{Tr}(a)\,, \\ \mathrm{Tr}(a\sigma_n^{-1}) &= \overline{\lambda}_\rho \,\mathrm{Tr}(a)\,, \\ \mathrm{Tr}(e) &= 1\,, \\ \mathrm{Tr}(b^{-1}) &= \overline{\mathrm{Tr}(b)}\,, \end{aligned} \tag{MII}$$

für $a, b \in B_n$. (MI) und (MII) heißen **Markov-Eigenschaft**.

Beweis: i) wird vollständig analog zu Korollar 11.23 gezeigt, es ist nur noch anzumerken, daß φ kompatibel ist zur Inklusion $\rho^n(\mathfrak{A})' \subset \rho^{n+1}(\mathfrak{A})'$, denn $\phi^{n+1}(E) = \phi^n(E)$ für $E \in \rho^n(\mathfrak{A})'$.
ii): Daß Tr eine positive Spur auf B_n ist, folgt aus den entsprechenden Eigenschaften von φ , ebenso $\mathrm{Tr}(e) = 1$. Weiterhin ist für $b \in B_n$.

$$\varphi(\varepsilon_\rho^{(n+1)}(b)) = \varphi(\varepsilon_\rho^{(n)}(b))\,,$$

also kann Tr auch auf B_∞ fortgesetzt werden. (MI) folgt aus i) (Spureigenschaft von φ). Tr ist als Spur invariant unter inneren Automorphismen von B_n, insbesondere unter dem Automorphismus $\widehat{\ }$: $B_{n+1} \to B_{n+1}$, $\sigma_i \mapsto \sigma_{n+1-i}$ Dieser ist in der Tat ein innerer Automorphismus und wird induziert durch

$$\begin{aligned} b_{n+1} &\equiv (\sigma_1 \dots \sigma_n)(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \dots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1\,, \\ \widehat{b} &= b_{n+1}^{-1} b b_{n+1}^{-1}\,, \end{aligned} \tag{17.3}$$

wie man leicht nachrechnet) und damit wird

$$\mathrm{Tr}(a\sigma_n) = \mathrm{Tr}(\widehat{a\sigma_n}) = \mathrm{Tr}(\hat{a}\sigma_1)\,,$$

wobei im letzten Schritt a in natürlicher Weise als Element von B_{n+1} aufgefaßt wird. Zu zeigen bleibt:

$$\mathrm{Tr}(b\sigma_1) = \mathrm{Tr}(b)\lambda_\rho\,,$$

für alle Wörter $b \in B_{n+1}$ in den Generatoren $\sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_n^{\pm 1}$, denn $a \in B_n$ enthält σ_n nicht und deshalb brauchen wir für b $\sigma_{n+1-n} = \sigma_1$ nicht zu betrachten. Für solche b ist

$$\varepsilon_\rho^{(n+1)}(b) = \rho(\varepsilon_\rho^{(n)}(b'))\,,$$

für ein geeignetes $b' \in B_n$. Damit ist

$$\mathrm{Tr}(b\sigma_1) = \varphi(\rho(\varepsilon_\rho^{(n)}(b'))\varepsilon_\rho) = \varphi(\rho(\varepsilon_\rho^{(n)}(b'))\varphi(\varepsilon_\rho) = \varphi(\varepsilon_\rho^{(n)}(b'))\lambda_\rho = \varphi(\varepsilon_\rho^{(n+1)}(b))\lambda_\rho = \mathrm{Tr}(b)\lambda_\rho\,.$$

Die zweite Relation von (MII) folgt aus der ersten und der Unitarität von $\varepsilon_\rho^{(n)}$, genauso, wie $\mathrm{Tr}(b^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(b)}$. ■

(Man beachte die Ähnlichkeit des Beweises mit dem Verfahren von Lemma 9.2).

Korollar 17.2 *i) Ist b_1 ein Wort in den Generatoren $\sigma_i^{\pm 1}$, $i < k$, b_2 eines in den Generatoren $\sigma_j^{\pm 1}$, $j \geq k$, für ein $1 \leq k$, so gilt*

$$\mathrm{Tr}(b_1 b_2) = \mathrm{Tr}(b_1)\,\mathrm{Tr}(b_2)\,. \tag{17.4}$$

ii) $\mathrm{Tr}(\overline{b}) = \mathrm{Tr}(b)$, wenn $b = \sigma_{i_1}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_r}^{\pm 1}$ und $\overline{b} = \sigma_{i_r}^{\pm 1} \dots \sigma_{i_1}^{\pm 1}$ das umgekehrte Wort ist.

iii) Die Funktion

$$\alpha(b) \equiv |\lambda_\rho|^{-(n-1)} \left(\frac{\overline{\lambda_\rho}}{|\lambda_\rho|}\right)^{n_+ - n_-} \mathrm{Tr}(b)\,, \quad \forall b \in B_n\,, \tag{17.5}$$

wobei n_+ bzw. n_- die Generatoren mit positivem bzw. negativem Vorzeichen in b abzählt, ist eine Verkettungs-Invariante.

i) ist echt stärker als die erste Relation von (MII), die ein Spezialfall davon ist (setze $b_2 = \sigma_n$).

Beweis: Trotzdem kann i) prinzipiell genauso wie (MII) bewiesen werden, denn unter den gemachten Voraussetzungen haben wir $\varepsilon_\rho^{(n)}(b_1 b_2) = \varepsilon_\rho^{(n)}(b_1)\varepsilon_\rho^{(n)}(b_2)$, mit $\varepsilon_\rho^{(n)}(b_1) \in (\rho^k|\rho^k)$ und $\varepsilon_\rho^{(n)}(b_2) = \rho^{k-1}(U)$ für ein geeignetes unitäres $U \in \mathfrak{A}$. Dann kann man genauso weiterverfahren, wie oben. iii): α ist offensichtlich invariant unter den **Markov-moves** $ab \mapsto ba$, $a \mapsto a\sigma_n^{\pm 1}$, $a, b \in B_n$ und ist deshalb nach Markov's Theorem eine Verkettungs-Invariante (siehe [Bir74], S.51, Thm. 2.3). ■

§18 Inzidenzmatrizen, superselection-Kanäle

Als wir in §11 die Zerlegung finiter Morphismen in direkte Summen von irreduziblen hergeleitet haben, haben wir außer Acht gelassen, daß in einer solchen Zerlegung ja auch durchaus ein Sektor mehrmals — d.h. mit Vielfachheit > 1 auftauchen kann. Diese Möglichkeit wollen wir nun näher ins Auge fassen, wobei wir zugleich vieles an Notation für die folgenden Abschnitte festlegen.

Bei Untersuchungen über Äquivalenzklassen ist es immer pragmatisch, von diesen abzugehen und nur noch einzelne Repräsentanten zu betrachten.

Definition 18.1 *Zu den Mengen Δ, Δ_{fin}, Δ_{irr}, Δ_0 und Δ_{S} wählen wir jeweils eine Menge von Repräsentanten — einen pro Äquivalenzklasse — und bezeichnen diese mit $\bigtriangledown$, $\bigtriangledown_{\mathrm{fin}}$, $\bigtriangledown_{\mathrm{irr}}$, $\bigtriangledown_0$ und $\bigtriangledown_{\mathrm{S}}$ respektive. Die Repräsentantenmengen seien so gewählt, daß sie maximal übereinstimmen, d.h. es sollen dieselben Mengenbeziehungen gelten, wie für die Δ:*

$$\bigtriangledown_{\mathrm{irr}} \subset \bigtriangledown\,, \quad \bigtriangledown_{\mathrm{fin}} \subset \bigtriangledown\,, \quad \bigtriangledown_0 = \bigtriangledown_{\mathrm{fin}} \cap \bigtriangledown_{\mathrm{irr}}\,, \tag{18.1}$$

etc. Wir nehmen an, daß $\bigtriangledown_{\mathrm{S}}$ eine abzählbare Menge ist[1]. Die Elemente von $\bigtriangledown_0$ werden durch Großbuchstaben indiziert: ρ_{I}, ρ_{J}, ρ_{K}, ... Die Konjugation wird auf die Indexmenge übertragen, d.h.

$$\rho_{\bar{\mathrm{I}}} \equiv \overline{\rho_{\mathrm{I}}}\,. \tag{18.2}$$

Dem Vakuumsektor $[\iota]$ wird der Index 0 zugeordnet.

Wir werden die Notation insofern lax handhaben, als wir gelegentlich Morphismen durch ihre Indizes vertreten lassen und ϕ_{I} für die Linksinverse von ρ_{I} etc. schreiben.

Mit diesen Indexmengen definieren wir nun die Vielfachheitsmatrizen:

Definition 18.2 *Sei $\rho \in \bigtriangledown_{\mathrm{fin}}$. Dann definieren wir die Matrixelemente der* **Inzidenzmatrizen** *N implizit durch*

$$\begin{aligned} [\rho] &= \sum_{\mathrm{I}} (N_\rho)^{\mathrm{I}} [\rho_{\mathrm{I}}]\,, \\ [\rho_{\mathrm{I}}\rho] &= \sum_{\mathrm{J}} (N_\rho)^{\mathrm{J}}_{\mathrm{I}} [\rho_{\mathrm{J}}]\,, \\ [\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}] &= \sum_{\mathrm{K}} N^{\mathrm{K}}_{\mathrm{IJ}} [\rho_{\mathrm{K}}]\,. \end{aligned} \tag{18.3}$$

D.h., als die Vielfachheiten von $\rho_{\mathrm{I}} \in \bigtriangledown_0$ in ρ, von $\rho_{\mathrm{J}} \in \bigtriangledown_0$ in $\rho_{\mathrm{I}}\rho \in \bigtriangledown_{\mathrm{fin}}$ und von $\rho_{\mathrm{K}} \in \bigtriangledown_0$ in $\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}} \in \bigtriangledown_{\mathrm{S}}$. Die Summenschreibweise ist dabei symbolisch für die Schreibweise aus Korollar 11.10 (das Gleichheitszeichen ist erlaubt, solange man Äquivalenzklassen betrachtet). Wir führen außerdem die Matrixschreibweise

$$N_\rho \equiv (N_\rho)^{\mathrm{I}}_{\mathrm{J}}\,, \quad N_{\mathrm{I}} \equiv (N_{\mathrm{I}})^{\mathrm{K}}_{\mathrm{J}} \equiv N^{\mathrm{K}}_{\mathrm{IJ}}\,. \tag{18.4}$$

Eine unmittelbare Folgerung aus dieser Definition ist die

[1] Das ist sicher keine allzu schwere Forderung.

Bemerkung 18.3 *Es gilt:*

$$(N_\rho)^{\mathrm{I}} = \dim(\rho|\rho_{\mathrm{I}})\,, \quad (N_\rho)_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}} = \dim(\rho_{\mathrm{I}}\rho|\rho_{\mathrm{J}})\,, \quad N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}} = \dim(\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{K}})\,. \tag{18.5}$$

Diese Bemerkung stiftet uns an, die Hilbertraumstruktur der genannten Intertwinerräume genauer festzulegen. Das ist auf natürliche Weise möglich:

Definition 18.4 *Seien $\rho_{\mathrm{I}}\,,\ \rho_{\mathrm{J}}\,,\ \rho_{\mathrm{K}} \in \nabla_0\,,\ \rho \in \nabla_{\mathrm{fin}}$. Der Raum $(\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{K}})$ (bzw. $(\rho_{\mathrm{I}}\rho|\rho_{\mathrm{J}})$) erhält die Struktur eines Hilbertraums durch die Definition eines Skalarprodukts: Für $R\,,\ S \in (\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{K}})$ (bzw. $(\rho_{\mathrm{I}}\rho|\rho_{\mathrm{J}})$) setze*

$$(R, S)\cdot \mathbb{1} \equiv R^* S\,. \tag{18.6}$$

Wir wählen bezüglich dieses Skalarprodukts für $(\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{K}})$ (bzw. $(\rho_{\mathrm{I}}\rho|\rho_{\mathrm{J}})$) eine Orthonormalbasis von Isometrien T_e^α, wobei α der Vielfachheitsindex $\alpha = 1,\ \ldots, N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}}$ (bzw. $(N_\rho)_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}}$) und e eine Kurzschreibweise für den Multiindex

$$e \equiv \left({}_{s(e)}{}^{r(e)}{}_{c(e)}\right) \equiv \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{J}}\right) \ \left(bzw.\ \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{\rho}\right)\right)\,, \tag{18.7}$$

ist. e heißt **superselection-Kanal** *oder* **Fusionskanal***,*

und die in ihm auftretenden Morphismen bzw. Indizes tragen die Namen:

- *$s(e)$:* **Quelle***,*
- *$r(e)$:* **Ziel** *und*
- *$c(e)$:* **Ladung**.

Ist $\mathrm{I} = 0$ oder $\mathrm{J} = 0$ (bzw. $\mathrm{I} = 0$), so wählen wir $T_e^\alpha = \mathbb{1}$, falls die Dimensionen der Räume nicht verschwinden (d.h., falls die irreduziblen Morphismen nicht disjunkt sind. Beachte Bem. 6.4). Ist das Ziel trivial, also Quelle und Ladung zueinander konjugiert, schreiben wir für das einzige Basiselement $T_e = R_{\mathrm{I}} = R_{\overline{\mathrm{J}}}$ (bzw. $T_e = R_\rho = R_{\overline{\mathrm{I}}}$).

Die obengenannten Intertwinerräume nennen wir **Fusionsräume**, die Elemente ihrer Basen **Fusionierer**.

Bemerkung 18.5 *i) Sei $e = \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{J}}\right)$ und f ein Kanal mit gleicher Quelle und Ladung. Dann gilt die Orthogonalitätsrelation*

$$T_e^{\alpha *} T_f^\beta = \delta_{ef}\delta_{\alpha\beta}\cdot \mathbb{1}\,, \quad \alpha, \beta = 1,\ \ldots, N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}}\,, \tag{18.8}$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{e,\alpha} T_e^\alpha T_e^{\alpha *} = \mathbb{1}\,. \tag{18.9}$$

ii) Es gilt die Multiplikationsregel

$$T_e^\gamma T_{e'}^{\alpha *} T_f^\beta T_{f'}^{\delta *} = \delta_{e'f}\delta_{\alpha\beta}\cdot T_e^\gamma T_{f'}^{\delta *}\,. \tag{18.10}$$

Beweis: Unmittelbar klar aus der Wahl der T_e als Orthonormalbasis. ■

Wir werden den Vielfachheitsindex von nun an unterdrücken und implizit Summation über diesen annehmen, wann immer ein T_e und ein T_e^* in demselben Term auftreten.

Wir können nun die Verkettung von superselection-Kanälen einführen:

Definition und Bemerkung 18.6 *Sind* $e_1, \ldots, e_n$ *superselection-Kanäle mit* $r(e_i) = s(e_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$. *Jede solche Folge*

$$\xi \equiv e_1 \circ \ldots \circ e_n \equiv (e_1 \ldots, e_n), \tag{18.11}$$

heißt **Pfad** *der Länge* n *von* $s(e_1)$ *nach* $r(e_n)$. *Die Menge dieser Pfade wird mit* $\mathrm{Pfad}^{(n)}_{s(e_1)r(e_n)}$ *bezeichnet. die Intertwining Operatoren*

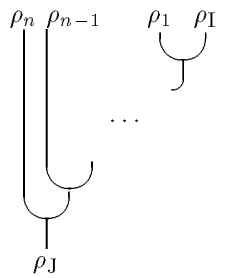
$$T_\xi \equiv T_{e_1 \circ \ldots \circ e_n} \equiv T_{e_1} \ldots T_{e_n}, \quad \xi = (e_1 \ldots, e_n) \in \mathrm{Pfad}^{(n)}_{s(e_1)r(e_n)}, \tag{18.12}$$

bilden eine Basis des Intertwinerraums $(s(e_1)c(e_1)\ldots c(e_n)|r(e_n))$. *Mit anderen Worten,* $(s(e_1)c(e_1)\ldots c(e_n)|r(e_n))$ *hat die Struktur einer direkten Summe von Tensorprodukten*[2]*:*

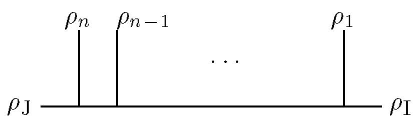
$$(s(e_1)c(e_1)\ldots c(e_n)|r(e_n)) \cong \bigoplus_{\xi \in \mathrm{Pfad}^{(n)}_{s(e_1)r(e_n)}} (s(e_1)c(e_1)|r(e_1)) \otimes \ldots \otimes (s(e_n)c(e_n)|r(e_n)). \tag{18.13}$$

Beweis: Orthonormalität und Vollständigkeit der oben definierten Basis folgen durch Iteration von (18.8) und (18.9). ■

Pfade von superselection-Kanälen lassen sich bequem graphisch Darstellen. Sei $\xi = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{Pfad}^{(n)}_{\mathrm{IJ}}$ und sei $c(e_1) = \rho_1, \ldots, c(e_n) = \rho_n$. Dann stellen wir T_ξ normalerweise dar durch



Diese Darstellung können wir in konsistenter Weise „verbiegen“:



Der Pfad läuft also von der ersten Quelle rechts nach links zum letzten Ziel, unter der Wirkung der n Ladungen. Mit dieser Konvention läßt sich später, wenn Operatoren der Zopfgruppendarstellung auf die Ladungen wirken, trefflich arbeiten.

Wenn wir Skalarprodukte à la (18.6) von T_ξ, $T_{\xi'}$ betrachten wollen, müssen ξ und ξ' insofern zusammenpassen, als daß ihre Endpunkte übereinstimmen. Daß führt zu folgender Begriffsbildung:

[2] Man beachte, daß wir hier n Vielfachheitsindizes unterdrückt haben, die nun in Form der Tensorprodukte wieder auftauchen

Definition 18.7 *Ein Paar* (ξ,ξ') *mit* $\xi,\,\xi'\in\mathrm{Pfad}^{(n)}_{\mathrm{IJ}}$, *heißt* **Strang** *mit Aufhängungspunkt* I. *Man schreibt*

$$\mathrm{Strang}^{(n)}_{\mathrm{I}} \equiv \left\{(\xi,\xi')\mid \xi,\,\xi'\in\mathrm{Pfad}^{(n)}_{\mathrm{IJ}}\ \text{für ein I}\right\}. \tag{18.14}$$

Mit dem, was wir jetzt wissen, können wir alle wichtige Relationen zwischen den Inzidenzmatrizen ableiten.

Satz 18.8 *i)* $N^{\mathrm{K}}_{\mathrm{IJ}} = N^{\mathrm{K}}_{\mathrm{JI}} = N^{\mathrm{J}}_{\bar{\mathrm{I}}\mathrm{K}} = N^{\overline{\mathrm{K}}}_{\overline{\mathrm{IJ}}}$, $N^{\mathrm{K}}_{0\mathrm{J}} = N^{0}_{\mathrm{J}\overline{\mathrm{K}}}N^{0}_{\mathrm{K}\overline{\mathrm{J}}} = \delta_{\mathrm{JK}}$ $N_{\mathrm{K}} = N^{t}_{\overline{\mathrm{K}}}$, *wobei* t *die Transposition der Matrix bedeutet.*

ii) $N_{\mathrm{I}}\cdot N_{\mathrm{J}} = N_{\mathrm{J}}\cdot N_{\mathrm{I}} = \sum_{\mathrm{L}} N^{\mathrm{L}}_{\mathrm{IJ}}\cdot N_{\mathrm{L}}$.

iii) $N_{\mathrm{I}}\cdot\vec{d} = d_{\rho_{\mathrm{I}}}\cdot\vec{d}$, *wobei* $\vec{d}$ *der Vektor mit den Komponenten* $\vec{d}_{\mathrm{J}}\equiv d_{\rho_{\mathrm{J}}}$ *ist.*

Beweis: Das erste Gleichheitszeichen von i) folgt einfach aus der Tatsache, daß die Multiplikation von Äquivalenzklassen abelsch ist (vgl. Lemma 5.13). Um das zweite zu sehen, rechnet man nach, daß die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} X:\ (\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{K}}) &\longrightarrow (\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\bar{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{K}}), \quad T\longmapsto R^{*}_{\bar{\mathrm{I}}}\rho_{\bar{\mathrm{I}}}(T),\\ Y:\ (\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\bar{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{K}}) &\longrightarrow (\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{K}}), \quad S\longmapsto \rho_{\mathrm{I}}(S)\overline{R}_{\mathrm{I}}, \end{aligned}$$

invers zueinander sind: $X\circ Y(S) = R^{*}_{\bar{\mathrm{I}}}\rho_{\bar{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(S)\rho_{\bar{\mathrm{I}}}(\overline{R}_{\mathrm{I}}) = SR^{*}_{\bar{\mathrm{I}}}\rho_{\bar{\mathrm{I}}}(\overline{R}_{\mathrm{I}}) = \overline{\lambda}_{\rho_{\mathrm{I}}}$ und ebenso für $Y\circ X$. Die Vektorräume haben also dieselbe Dimension und das zeigt

$$\dim(\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{K}}) = \dim(\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\bar{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{K}}) = \dim(\rho_{\bar{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{K}}|\rho_{\mathrm{J}}),$$

also die zweite Gleichheit; damit ist auch die dritte Aussage von i) bewiesen. Die dritte Gleichheit folgt durch Iteration der ersten beiden, nämlich:

$$N^{\mathrm{K}}_{\mathrm{IJ}} = N^{\mathrm{J}}_{\bar{\mathrm{I}}\mathrm{K}} = N^{\mathrm{J}}_{\mathrm{K}\bar{\mathrm{I}}} = N^{\bar{\mathrm{I}}}_{\overline{\mathrm{K}}\mathrm{J}} = N^{\bar{\mathrm{I}}}_{\mathrm{J}\overline{\mathrm{K}}} = N^{\overline{\mathrm{K}}}_{\overline{\mathrm{JI}}} = N^{\overline{\mathrm{K}}}_{\overline{\mathrm{IJ}}}.$$

Die zweite Aussage ist trivial wegen der Irreduzibilität der Repräsentanten und Bem.6.4ii). ii) ist einfach die Summenregel aus Korollar 11.23v) unter Berücksichtigung der Vielfachheiten:

$$\sum_{\mathrm{K}} N^{\mathrm{K}}_{\mathrm{IJ}} d_{\rho_{\mathrm{K}}} = d_{\rho_{\mathrm{I}}} d_{\rho_{\mathrm{J}}}.$$

Aus Bem.18.6 wissen wir, daß (bei Anwendung der Summenkonvention)

$$(N_{\mathrm{I}}\cdot N_{\mathrm{J}})^{\mathrm{M}}_{\mathrm{K}} = N^{\mathrm{L}}_{\mathrm{IK}}N^{\mathrm{M}}_{\mathrm{JL}} = \sum_{\mathrm{L}} \dim(\rho_{\mathrm{K}}\rho_{\mathrm{I}}|\rho_{\mathrm{L}})\dim(\rho_{\mathrm{J}}\rho_{\mathrm{L}}|\rho_{\mathrm{M}}) = \dim(\rho_{\mathrm{K}}\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{M}}),$$

unter Ausnutzung von i) — dies ist der wichtige Spezialfall von Pfaden der Länge 2 der obigen Bemerkung. Auf dieselbe Weise erhalten wir für das entsprechende Matrixelements der rechten Seite von Gleichung ii)

$$\sum_{\mathrm{L}} N^{\mathrm{L}}_{\mathrm{IJ}}N^{\mathrm{M}}_{\mathrm{LK}} = \dim(\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}\rho_{\mathrm{K}}|\rho_{\mathrm{M}}).$$

Diese beiden Intertwinerräume haben wieder gleiche Dimension, denn zwischen ihnen vermittelt $\varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}},\rho_{\mathrm{K}})$ eine unitäre Abbildung. ■

Vertauscht man bei der Definition der Verknüpfung von Kanälen Ladung und Quelle, so erhält man eine neue Basis für die Fusions-Intertwinerräume aus jener Definition.

Definition und Bemerkung 18.9 *Für einen Kanal* $(\,{}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{J}})$, *(bzw.* $(\,{}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{\rho})$, $\rho \in \nabla_{\mathrm{fin}}$*) wählen wir eine Orthonormalbasis* S_e^α *von* $(\rho_{\mathrm{J}}\rho_{\mathrm{I}}|\rho_{\mathrm{K}})$ *(bzw.* $(\rho\rho_{\mathrm{I}}|\rho_{\mathrm{J}})$*), wobei* $\alpha = 1, \ldots, N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}}$ *(bzw.* $(N_\rho)_{\mathrm{J}}^{\mathrm{I}}$*) der Vielfachheitsindex ist (den wir nun sofort wieder unterdrücken). Sei* $\xi \in \mathrm{Pfad}^{(n)}_{s(e_1)r(e_n)}$ *und seien* $s(e_i) = \rho_i$, $i = 1, \ldots, n$. *Dann bilden die intertwining Operatoren*

$$S_\xi \equiv \rho_n \ldots \rho_2(S_{e_1}) \ldots \rho_n(S_{e_{n-1}})S_{e_n}\,, \tag{18.15}$$

eine Orthonormalbasis des Intertwinerraumes $(s(e_n) \ldots s(e_1)c(e_1)|r(e_n))$. *Dieser Raum zerfällt ebenso in eine Summe von Tensorprodukten, wie in Bem.18.6. Es gilt*

$$\rho(S_\xi S_{\xi'}^*) = \sum_e S_{\xi\circ e} S_{\xi'\circ e}^*\,. \tag{18.16}$$

für alle $\xi = (e_1, \ldots, e_n)$, $\xi' = (e_1', \ldots, e_n')$ *mit* $r(e_n) = r(e_n')$. *Die Summe läuft dabei über alle Kanäle mit* $s(e) = r(e_n) = r(e_n')$.

Beweis: Außer (18.16) ist alles klar. Wählen wir o.B.d.A. $e = (\,{}_{r(e_n)}{}^{r(e)}{}_{\rho})$, und seien $s(e_i) = \rho_i$, $i = 1, \ldots, n$, $s(e_i') = \rho_i'$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist die Summe auf der rechten Seite gleich

$$\sum_e \rho\rho_n \ldots \rho_2(S_{e_1}) \ldots \rho(S_{e_n})S_e S_e^* \rho(S_{e_n'})^* \ldots \rho\rho_n' \ldots \rho_2'(S_{e_1'})^*\,,$$

und die Vollständigkeitsrelation für die S liefert die gewünschte Identität. ■

Dies läuft darauf hinaus, die Richtung der Pfade umzukehren: Während sie in der obigen Graphik von rechts nach links laufen, gehen sie nun von der Quelle links zum Ziel rechts.

Wendet man Linksinverse auf Stränge von S-Fusionierern an, so findet man eine Art iterierte „Orthogonalität“:

Lemma 18.10 *Sei* $(\xi \circ e, \xi' \circ e') \in \mathrm{Strang}_{\mathrm{I}}^{(n+1)}$. *Dann gilt*

$$\phi\,(S_{\xi\circ e} S_{\xi'\circ e'}) = \delta_{ee'} \frac{d_{\mathrm{K}}}{d_\rho d_{\mathrm{J}}} S_\xi S_{\xi'} \tag{18.17}$$

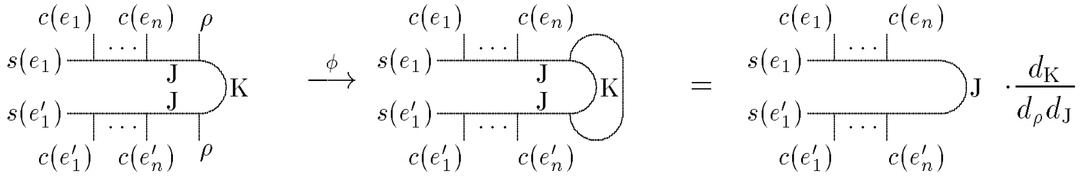
wenn $e = (\,{}_{\mathrm{J}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\rho})$ *und* ϕ *eine Linksinverse von* $\rho \in \nabla_{\mathrm{fin}}$ *ist.*

Beweis: Verwenden wir dieselbe Notation wie in der letzten Bemerkung, so finden wir

$$\phi\,(S_{\xi\circ e} S_{\xi'\circ e'}) = \phi\left(\rho\rho_n \ldots \rho_2(S_{e_1}) \ldots \rho(S_{e_n})S_e S_e^* \rho(S_{e_n'})^* \ldots \rho\rho_n' \ldots \rho_2'(S_{e_1'})^*\right) = S_\xi S_{\xi'} \phi(S_e S_e^*),$$

Nun ist $S_e S_e^*$ ein Projektor auf eine irreduzible Komponente des Produkts $\rho\rho_{\mathrm{J}}$ und (11.14) liefert (18.17). ■

Verwenden wir die oben eingeführte Darstellung von Fusionspfaden, so haben wir für (18.17) eine schöne Veranschaulichung, in Analogie zu Fig.16.1.



Die Fusionsräume, zu denen die T_e bzw. S_e Basiselemente sind, sind isomorph. Wie wir schon im Beweis von Satz 18.8 gesehen hatten, bildet ein statistischer Operator diese Räume unitär ineinander ab. Es liegt daher nahe und wird sich bald als nützlich erweisen, den Basiswechsel zwischen T- und S-Basis zu betrachten.

Zunächst sind wir für die elementaren Fusionsräume $(\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{K}}) \ni T_e$, $e = ({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{J}})$ frei, einfach

$$S_e \equiv \varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}})T_e\,, \tag{18.18}$$

zu wählen. Damit können wir den Basiswechsel auch für längere Fusionspfade leicht ausrechnen, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 18.11 *Sei* $\xi = (e_1\,,\ \ldots,\, e_n) \in \mathrm{Pfad}^{(n)}_{\mathrm{IJ}}$ *mit* $c(e_i) = \rho_i\,,\ i = 1,\ \ldots,\, n$. *Dann ist*

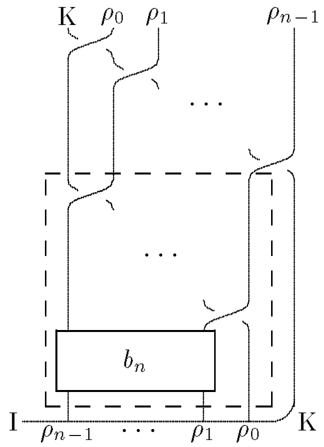
$$S_\xi = \varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_n \ldots \rho_1)\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon_{b_n}(\rho_1,\ \ldots, \rho_n))T_\xi\,, \tag{18.19}$$

wobei b_n *das in (17.3) definierte Element der Zopfgruppe ist.*

Beweis: Für $n = 1$ reduziert sich (18.19) auf die Basiswahl (18.18). Betrachten wir daher die Aussage für jeden Pfad ξ der Länge $n-1$ von I nach J als gezeigt. Schließen wir an $s(e_1)$ =I einen weiteren Kanal $e = ({}_{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{I}}{}_{\rho_0})$ und rechnen alles aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S_{e\circ\xi} &= \rho_{n-1} \ldots \rho_1(S_e)S_\xi = \\ &= \rho_{n-1} \ldots \rho_1(\varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{K}}, \rho_0)T_e)\varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{n-1} \ldots \rho_1)\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon_{b_{n-1}}(\rho_1,\ \ldots, \rho_{n-1}))T_\xi = \\ &= \rho_{n-1} \ldots \rho_1(\varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{K}}, \rho_0))\varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{K}}\rho_0, \rho_{n-1} \ldots \rho_1)T_e\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon_{b_{n-1}}(\rho_1,\ \ldots, \rho_{n-1}))T_\xi = \\ &= \rho_{n-1} \ldots \rho_1(\varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{K}}, \rho_0))\varepsilon^{+}(\rho_{\mathrm{K}}\rho_0, \rho_{n-1} \ldots \rho_1)\rho_{\mathrm{K}}\rho_0(\varepsilon_{b_{n-1}}(\rho_1,\ \ldots, \rho_{n-1}))T_{e\circ\xi}\,, \end{aligned}$$

wobei wir zunächst (16.7i) und dann die Intertwinereigenschaft von T_e benutzt haben. Jetzt machen wir am besten graphisch weiter. Was wir bis jetzt haben ist



Dabei haben wir für $\rho_0(\varepsilon_{b_{n-1}}(\rho_1,\ \ldots, \rho_{n-1}))$ einfach eine „Black Box“ eingesetzt, die die Reihenfolge der $\rho_1\,,\ \ldots,\, \rho_{n-1}$ umkehrt. Weiterhin haben wir das Vertauschen von $\rho_{\mathrm{K}}\rho_0$ mit den $n-1$ Fäden etwas auseinandergezogen, um zu sehen, daß der gestrichelt eingerahmte Intertwiner genau $\rho_{\mathrm{K}}(\varepsilon_{b_n}(\rho_0,\ \ldots, \rho_{n-1})$ ist (vgl. Def. (17.3)). Zuletzt wird — genau wie es sein soll — ρ_{K} mit allen n Fäden vertauscht. Das liefert genau (18.19). ■

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch sehen, wie man prinzipiell in den Basen der Fusionsräume interessante Operatoren diagonalisieren kann. Dabei leiten wir zugleich ein für später wichtiges Ergebnis ab.

Lemma 18.12 *Sei* $e = \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{J}}\right)$ *. Dann diagonalisiert* T_e *den* **Monodromieoperator***:*

$$T_e^* \varepsilon^+(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) \varepsilon^+(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) T_e = \frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{J}}} . \tag{18.20}$$

Beweis: (18.17) benutzend rechnen wir aus:

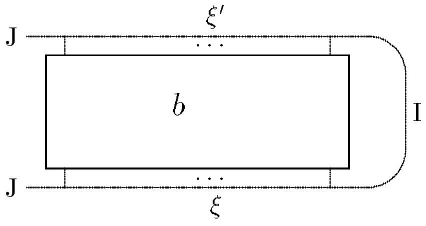
$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{\mathrm{K}}}{d_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{J}}} &= \frac{d_{\mathrm{K}}}{d_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{J}}} \frac{\omega_{\mathrm{K}}}{d_{\mathrm{K}}} = \lambda_{\mathrm{K}} \cdot \phi_{\mathrm{I}}(T_e T_e^*) = \lambda_{\mathrm{K}} \cdot \phi_{\mathrm{J}} \phi_{\mathrm{I}}(T_e T_e^*) = \phi_{\mathrm{J}} \phi_{\mathrm{I}} \left(T_e \rho_{\mathrm{K}}(R_{\overline{\mathrm{K}}}^*) \varepsilon_{\mathrm{K}}^+ \rho_{\mathrm{K}}(R_{\overline{\mathrm{K}}}) T_e^* \right) = \\
&= \phi_{\mathrm{J}} \phi_{\mathrm{I}} \left(\rho_{\mathrm{I}} \rho_{\mathrm{J}} (R_{\overline{\mathrm{K}}}^* T_e^*) \varepsilon^+(\rho_{\mathrm{I}} \rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}} \rho_{\mathrm{J}}) \rho_{\mathrm{I}} \rho_{\mathrm{J}} (T_e R_{\overline{\mathrm{K}}}) \right) = \\
&= R_{\overline{\mathrm{K}}}^* T_e^* \phi_{\mathrm{J}} \phi_{\mathrm{I}} \left[\rho_{\mathrm{I}} \left(\varepsilon^+(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon_{\mathrm{J}}^+) \right) \varepsilon_{\mathrm{I}}^+ \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^+(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}})) \right] T_e R_{\overline{\mathrm{K}}} = \\
&= \lambda_{\mathrm{I}} R_{\overline{\mathrm{K}}}^* T_e^* \phi_{\mathrm{J}} \left(\varepsilon^+(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon_{\mathrm{J}}^+) \varepsilon^+(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) \right) T_e R_{\overline{\mathrm{K}}} = \lambda_{\mathrm{I}} \lambda_{\mathrm{J}} R_{\overline{\mathrm{K}}}^* T_e^* \varepsilon^+(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) \varepsilon^+(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) T_e R_{\overline{\mathrm{K}}} = \\
&= \lambda_{\mathrm{I}} \lambda_{\mathrm{J}} T_e^* \varepsilon^+(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) \varepsilon^+(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) T_e .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die vereinfachende Schreibweise $\varepsilon_{\mathrm{I}}^+ = \varepsilon_{\rho_{\mathrm{I}}}^+$ benutzt. Gehen wir die einzelnen Gleichungen durch: Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir nur ϕ_{J} auf einen Skalar angewandt. Dann benutzten wir die letzte Identität von (16.18). Die nächste Gleichheit ist eine wiederholte Anwendung von (16.7i). Das sechste Gleichheitszeichen folgt aus (16.8i), (16.8ii). Dann folgt die Auswertung der Linksinversen ϕ_{I} auf $[\,\ldots]$. Zuletzt benutzt man noch die Artin-Relation (16.9). ■

Die Aussage des obigen Lemmas ist natürlich auch für Pfade der Länge > 1 wahr: T_ξ, $\xi \in \mathrm{Pfad}_{\mathrm{IJ}}^{(n-1)}$, diagonalisiert die „höhere Monodromie" $\varepsilon_{C_n}^+(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$, wobei C_n das Zentrum der Zopfgruppe B_n ist.

§19 Zopf- und Fusionsmatrizen

Wir werden jetzt statistische Operatoren, d.h. Zopf-Intertwiner in den Pfad-Basen der Fusionsräume darstellen. Die Idee, um zu Matrixelementen zu gelangen ist diese:



Man schließt den Zopfer $\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon_b^{\pm}(\rho_1, \ldots, \rho_n))$ in das Skalarprodukt $T_{\xi'}^* T_\xi$ der Fusionierer zu Pfaden $\xi, \xi' \in \mathrm{Pfad}_{\mathrm{IJ}}^{(n)}$ ein. Mit anderen Worten, man betrachtet die unitäre Darstellung der B_n auf dem Hilbertraum $(\rho_{\mathrm{I}} \rho_1 \ldots \rho_n | \rho_{\mathrm{J}})$. Die Pfade müssen dabei natürlich kompatibel sein, d.h. die Ladungen vor und nach der Zopfung müssen zusammenpassen. Seien wir nun spezifisch:

Definition und Bemerkung 19.1 *Seien* $\xi = (e_1, \ldots, e_n)$, $\xi' = (e_1', \ldots, e_n') \in \mathrm{Pfad}_{\mathrm{IJ}}^{(n)}$, $c(e_1) = \rho_1, \ldots, c(e_n) = \rho_n$ *. Dann definieren wir die Matrixelemente der* **Zopfmatrix**[3] *für*

[3] Einer Anregung aus [Här93] folgend bezeichnen wir diese nicht wie in der algebraischen QFT üblich durch R sondern durch B.

ein Wort $b \in B_n$ durch

$$B^{(\pm)}_{\xi'\xi}(b) \cdot \mathbb{1} \equiv T^*_{\xi'} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}_b(\rho_1, \ldots, \rho_n)) T_\xi \,, \tag{19.1}$$

wenn die folgenden Einschränkungen für ξ, ξ' gelten:

$$c(e'_i) = \rho_{\pi(b)(i)} = c(e_{\pi(b)(i)}) \,, \quad i = 1, \ldots, n \,, \tag{19.2}$$

mit der natürlichen Projektion $\pi : B_n \to \mathbb{P}^{(n)}$. Die Zopfmatrizen sind unitäre Matrizen und es gilt

$$\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}_b(\rho_1, \ldots, \rho_n)) = \sum_{(\xi',\xi) \in \mathrm{Strang}^{(n)}_{\mathrm{I}}} B^{(\pm)}_{\xi'\xi}(b) T_{\xi'} T^*_\xi \,. \tag{19.3}$$

Beweis: Die Unitarität ergibt sich unmittelbar aus der Vollständigkeitsrelation der Fusionierer:

$$\sum_\xi B^{(\pm)}_{\xi'\xi}(b) (B^{(\pm)}_{\xi''\xi}(b))^\dagger = T^*_{\xi'} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}_b(\rho_1, \ldots, \rho_n)) \left(\sum_\xi T_\xi T^*_\xi \right) \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}_b(\rho_1, \ldots, \rho_n))^* T_{\xi''} = \delta_{\xi'\xi''} \,.$$

(19.3) folgt ebensoleicht aus den Definitionen. ■

Die numerischen Werte der Matrixelemente der B-Matrizen hängen natürlich von der speziellen Wahl der Fusionierer-Basis ab. Invariant sind aber ihre Transformationseigenschaften und die polynomialen Bedingungen, denen sie genügen und die wir im nächsten Abschnitt ableiten werden. Zudem können wir jetzt gleich die Markov-Spur durch die Zopfmatrizen ausdrücken! Dazu brauchen wir noch folgende Bemerkung, die Zopfmatrizen in der T- mit solchen in der S-Basis verknüpft.

Definition und Bemerkung 19.2 *Für ξ, $\xi' \in \mathrm{Pfad}^{(n)}_{\mathrm{IJ}}$ gelte die Notation aus Def.19.1 und die Bedingung (19.2). Dann setzen wir*

$$\widetilde{B}^{(\pm)}_{\xi'\xi}(b) \equiv S^*_{\xi'} \varepsilon^{\pm}_b(\rho_n, \ldots, \rho_1) S_\xi \,. \tag{19.4}$$

Dann gilt

$$\widetilde{B}^{(\pm)}_{\xi'\xi}(b) = B^{(\pm)}_{\xi'\xi}(\widehat{b}) = B^{(\pm)}_{\xi'\xi}(b_n^{-1} b b_n) \,, \tag{19.5}$$

wobei $\widehat{\ }: B_n \to B_n$ der Automorphismus $\sigma_i \mapsto \sigma_{n-i}$ der Zopfgruppe ist.

Das ist eigentlich klar, denn beim Übergang von der T- zur S-Basis passiert ja im wesentlichen nichts anderes, als daß die Reihenfolge der Ladungen verkehrt wird. Man kann das aber auch nachrechnen:
Beweis: Einsetzen von (18.19) in die Definition und zweimaliges Ausnutzen von (16.7i), (16.7ii) liefert unter Beachtung von (19.2) das gewünschte Ergebnis. ■

Wir beschränken uns nun auf den Spezialfall, daß alle Ladungen gleich sind: $c(e_1) = \ldots = c(e_n) = \rho \in \nabla_{\mathrm{irr}}$. Dann können wir die Markov-Spur ausrechnen:

Satz 19.3 *Sei $\rho \in \nabla_{\mathrm{irr}}$. Dann ist die zu diesem Morphismus assoziierte Markov-Spur eine gewichtete Summe über Charaktere endlichdimensionaler Darstellungen der B_n:*

$$\mathrm{Tr}(b) = \frac{1}{d^n_\rho d_{\mathrm{I}}} \sum_{\mathrm{J}} d_{\mathrm{J}} \sum_{\xi \in \mathrm{Pfad}^{(n)}_{\mathrm{IJ}}} B^{(+)}_{\xi\xi}(b) \,, \tag{19.6}$$

unabhängig von der Wahl von ρ_{I}.

Beweis: Sei ϕ die Linksinverse von ρ. Wendet man ϕ^n auf die zu (19.3) analoge Darstellung von $\varepsilon_\rho^{(n)}(b)$ an, so erhält man, wenn J der Endpunkt von ξ, ξ' ist

$$\mathrm{Tr}(b) = \phi^n(\varepsilon_\rho^{(n)}(b)) = \phi^n \left(\sum_{(\xi,\xi')\in \mathrm{Strang}_{\mathrm{I}}^{(n)}} \widetilde{B}^{(+)}_{\xi'\xi}(b) S_{\xi'} S_\xi^* \right) =$$

$$= \frac{1}{d_\rho^n} \sum_{(\xi,\xi')\in \mathrm{Strang}_{\mathrm{I}}^{(n)}} \delta_{\xi\xi'}\, \widetilde{B}^{(+)}_{\xi'\xi}(b)\, \frac{d_{\mathrm{J}}}{d_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{d_\rho^n d_{\mathrm{I}}} \sum_{\mathrm{J}} d_{\mathrm{J}} \sum_{\xi \in \mathrm{Pfad}_{\mathrm{IJ}}^{(n)}} \widetilde{B}^{(+)}_{\xi\xi}(b)\,,$$

was (19.6) für $\widetilde{B}$ statt B ist. Diese beiden Matrizen sind aber durch einen inneren Automorphismus der Zopfgruppe miteinander verbunden, wie (19.5) gezeigt hat. Unter einem solchen ist aber die Markov-Spur nach (MI) invariant. ■

Es scheint zwar auf den ersten Blick etwas tautologisch, erweist sich aber im nächsten Abschnitt als konsistent, auch die Fusion in ähnlicher Weise wie die Zopfung durch Matrizen darzustellen. Die Definition ist nach dem, was wir über die Zopfmatrizen erfahren haben, einleuchtend:

Definition und Bemerkung 19.4 *Sei* $e = \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{c(e)}\right)$, $e_1 \circ e_2 \in \mathrm{Pfad}_{\mathrm{IJ}}^{(2)}$ *und* $f = \left({}_{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{M}}{}_{\mathrm{L}}\right)$ *, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

$$c(e) = \mathrm{M}\,, \quad c(e_1) = \mathrm{K}\,, \quad c(e_2) = \mathrm{L}\,. \tag{19.7}$$

Dann definieren wir die Matrixelemente der **Fusionsmatrix** *zum Fusionskanal f durch*

$$F_{e_1 \circ e_2; f; e} \cdot \mathbb{1} \equiv T_{e_2}^* T_{e_1}^* \rho_{\mathrm{I}}(T_f) T_e\,. \tag{19.8}$$

Es gilt die Darstellung:

$$\rho_{\mathrm{I}}(T_f) = \sum_{e_1 \circ e_2\,,\, e} F_{e_1 \circ e_2; f; e} T_{e_1} T_{e_2} T_e^*\,, \tag{19.9}$$

wobei die Summation über $r(e)$, $r(e_1) = s(e_2)$ und $r(e_2)$ zu verstehen ist. Weiterhin gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{e,\, f} F_{e_1 \circ e_2; f; e} F^*_{e_1' \circ e_2'; f; e} = \delta_{e_1 \circ e_2, e_1' \circ e_2'}\,, \tag{19.10i}$$

und

$$\sum_{e_1 \circ e_2} F^*_{e_1 \circ e_2; f; e} F_{e_1 \circ e_2; f'; e'} = \delta_{ee'} \delta_{ff'}\,. \tag{19.10ii}$$

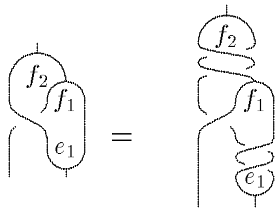
Beweis: Einige simple Rechnungen unter Ausnutzung der Orthogonalität und Vollständigkeit der Fusionierer liefern (19.9), (19.10i) und (19.10ii). ■

Schließlich wollen wir noch 18.20 benutzen, um einen für später wichtigen Zusammenhang zwischen $B^{(+)}$ und $B^{(-)}$ herzuleiten.

Satz 19.5 *Seien* $e_1 \circ e_2$, $f_1 \circ f_2 \in \mathrm{Pfad}_{\mathrm{IJ}}^{(2)}$ *mit* $s(e_2) = r(e_1) = \mathrm{K}$, $s(f_2) = r(f_1) = \mathrm{L}$. *Dann gilt:*

$$B^{(-)}_{f_1 \circ f_2, e_1 \circ e_2} = \frac{\omega_{\mathrm{K}} \omega_{\mathrm{L}}}{\omega_{\mathrm{I}} \omega_{\mathrm{J}}} \cdot B^{(+)}_{f_1 \circ f_2, e_1 \circ e_2}\,. \tag{19.11}$$

Beweis: Betrachten wir den relevanten Teil der Definition von $B^{(-)}$, so ist die Idee ganz natürlich:



Ersetzen wir nun den Term $T^*_{f_1}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^-(\rho_1,\rho_2))$ ($\rho_i = c(e_i)$, $i = 1, 2$) in der Definition von $B^{(-)}$ durch sein eben gefundenes Äquivalent, so wird

$$B^{(-)}_{f_1\circ f_2, e_1\circ e_2} = T^*_{f_2}\varepsilon^-(\rho_1,\rho_{\mathrm{L}})\varepsilon^-(\rho_{\mathrm{L}},\rho_1)T^*_{f_1}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^+(\rho_1,\rho_2))\varepsilon^+(\rho_1,\rho_{\mathrm{I}})\varepsilon^+(\rho_{\mathrm{I}},\rho_1)T_{e_1}T_{e_2}\,,$$

und Auswertung der Monodromien unter Verwendung von Lemma 18.20 liefert das Ergebnis. ■

§20 Polynomialgleichungen

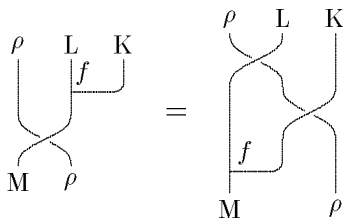
Es ist klar aus den Definitionen, daß die Matrixelemente der Zopfmatrizen nicht alle unabhängig voneinander sein können, denn insbesondere müssen sich die Zopfrelationen für aus Theorem 16.5 als Relationen zwischen B-Matrizen schreiben lassen. In der Pfadsprache ist das offensichtlich, denn es gilt zum Beispiel

$$B^{(\pm)}_{\xi'\xi}(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = B^{(\pm)}_{\xi'\xi}(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})\,,$$

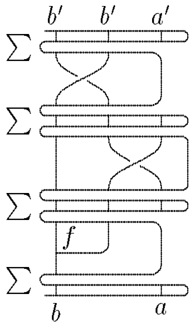
als Darstellung der Artin-Relation. Das sagt aber nicht viel. Um vernünftige Matrixgleichungen zu bekommen, muß man zunächst die B-Matrizen für beliebige Wörter aus elementaren B-Matrizen, das heißt solchen zu Pfaden der Länge 2, zusammenbauen. Im folgenden werden wir ein allgemeines Verfahren finden, jede gültige Intertwinerrelation, die Zopfer und Fusionierer enthält in eine Polynomialbedingung an die B- und F-Matrizen umzuschreiben. Dazu betrachten wir als nichttriviales Beispiel die Gleichung

$$T_f\varepsilon^{\pm}(\rho,\rho_{\mathrm{M}}) = \rho_{\mathrm{K}}(\varepsilon^{\pm}(\rho,\rho_{\mathrm{L}}))\varepsilon^{\pm}(\rho,\rho_{\mathrm{K}})\rho(T_f)\,, \tag{20.1}$$

die für $f = ({}_{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{M}}{}_{\mathrm{L}})$ eine Anwendung von (16.7i) und (16.8i) bzw. (16.7ii) und (16.8ii) ist:



Die Idee ist nun wie zuvor, diese Bilder durch Anwendung eines ρ_{I} und einschließen in Fusionspfade $\xi \in \mathrm{Pfad}^{(2)}_{\mathrm{IJ}}$, $\xi' \in \mathrm{Pfad}^{(3)}_{\mathrm{IJ}}$ zu Skalaren zu machen. Durch Einschieben vollständiger Einsen sollte man dann die Zopf- und Fusionsmatrizen identifizieren können und eine Gleichung der Form $FB = BBF$ erhalten. Das führen wir nun an der rechten Seite der obigen Gleichung durch. Dabei ist nur noch zu beachten, daß z.B. der Fusionierer T_f dann unter zwei Morphismen steht: $\rho_{\mathrm{I}}\rho(T_f)$. So etwas kann man aber immer auflösen gemäß $\rho_1\rho_2(A) = \sum_e T_e \rho_{\mathrm{I}}(A) T_e^*$, $e = \left(\begin{smallmatrix} & \mathrm{I} & \\ \rho_1 & & \rho_2\end{smallmatrix}\right)$. Damit erhalten wir letztlich folgendes Bild:



Schreibt man das hin, so erhält man für jeden Vertex, d.h. superselection-Kanal mit nach unten gerichteter Ladung ein T^*, für einen nach oben ein T. Es bleibt die Aufgabe, die Matrizen- und Summationsindizes festzulegen. Zunächst haben wir die äußeren Indizes a, b, a', b', c' festgelegt, die mit denen auf der linken Seite der Relation verglichen werden. Jede durchgehende senkrechte Linie bedeutet dann eine Gleichsetzung von Kanälen, ebenso sind zwei Vertices gleich die neben einer der Summationen direkt untereinander stehen. Auf diese Weise erhält man für diese Seite

$$\sum_{e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\,,\,f} B^{(\pm)}_{b'\circ c', e_1\circ e_2} B^{(\pm)}_{a'\circ e_1, a\circ e_3} F_{e_3\circ e_2; f; b} \tag{20.2}$$

wobei B für $B(\sigma)$ steht. Die Summation über den internen Fusionsindex f ist dabei explizit nur eine Summation über den Vielfachheitsindex, da der superselection-Kanal ja schon festgelegt ist.

Nach diesem allgemeinen Strickmuster erhalten wir etliche wichtige Relationen:

Theorem 20.1 *Die B- und F-Matrizen erfüllen (unter anderem) folgende Relationen:*

$$\sum_{e_1\circ e_2} B^{(+)}_{a'\circ b', e_1\circ e_2} B^{(-)}_{e_1\circ e_2, a\circ b} = \delta_{a'\circ b', a\circ b}\,, \tag{20.3}$$

d.h. $B^{(+)} = (B^{(-)})^\dagger$. *Und*

$$F_{a'\circ b'; \widetilde{f}; a} = \sum_{e_1\circ e_2} B^{(\pm)}_{a'\circ b', e_1\circ e_2} F_{e_1\circ e_2; f; a}\,, \tag{20.4}$$

wobei $\widetilde{f}$ aus f durch Austausch von Quelle und Ladung entsteht. Weiterhin gilt die **Pentagonidentität**

$$\sum_{e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\,,\,f} B^{(\pm)}_{b'\circ c', e_1\circ e_2} B^{(\pm)}_{a'\circ e_1, a\circ e_3} F_{e_3\circ e_2; f; b} = \sum_{e,\,f} F_{a'\circ b'; f; e} B^{(\pm)}_{e\circ c', a\circ b}\,, \tag{20.5}$$

und die sogenannte **Racah-Elliot-Gleichung**

$$\sum_{e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\,,\,f} F_{e_1\circ e_2; f; e} F_{a'\circ b'; e_1; e_3} F_{e_3\circ c'; e_2; a} = \sum_{e'\,,\,f'} F_{b'\circ c'; f'; e'} F_{a'\circ e'; e; a}\,. \tag{20.6}$$

Schließlich gilt die **Quanten-Yang-Baxter-Gleichung** *(QYBE):*

$$\sum_{e_1\,,\,e_2\,,\,e_3} B^{(\pm)}_{b'\circ c', e_2\circ e_3} B^{(\pm)}_{a'\circ e_2, a\circ e_1} B^{(\pm)}_{e_1\circ e_3, b\circ c} = \sum_{e_1'\,,\,e_2'\,,\,e_3'} B^{(\pm)}_{a'\circ b', e_1'\circ e_3'} B^{(\pm)}_{e_3'\circ c', e_2'\circ c} B^{(\pm)}_{e_1'\circ e_2', a\circ b} \tag{20.7}$$

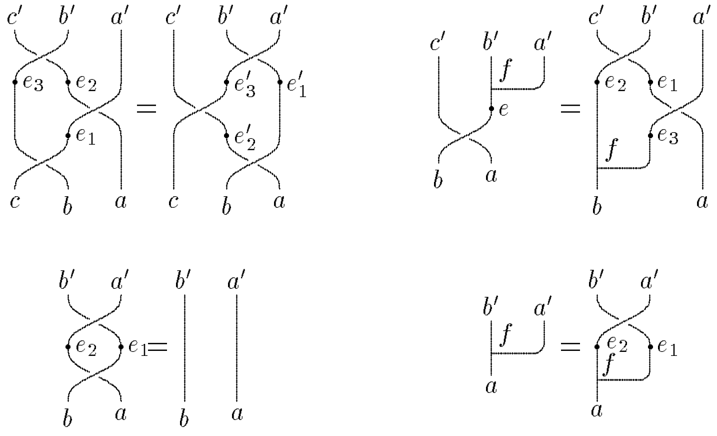


Fig. 20.1: Die Polynomialgleichungen

Beweis: Die (QYBE) wird nach der oben beschriebenen Weise aus der Artin-Relation (16.9) gewonnen. (20.5) haben wir oben schon besprochen. Die Racah-Elliot-Gleichung folgt aus der Anwendung derselben Methode auf die Entwicklung (19.9). (20.3) ist die Entsprechung von Thm.16.5i). (20.4) beschreibt den Übergang von der T- zur S-Basis für elementare Fusionierer (18.18). ■

Die Polynomialgleichungen können — bis auf (20.6) — ganz genauso wie die entsprechenden Intertwinerrelationen dargestellt werden. Als Regel wird dabei über alle inneren Indizes summiert. Diese Graphiken (siehe Fig.20.1) sind äquivalent zu dem, was in [MS89c] „geometrische Bilder" genannt wird.

§21 Das reduzierte Feldbündel

Die Übersicht, die wir durch die Beschränkung auf $\bigtriangledown_0$ und mittels der Fusioniererbasen über Produkte von Sektoren gewonnen haben, wollen wir nun auf das Feldbündel übertragen. Dadurch wird jede Redundanz aus der Beschreibung verschwinden und die ursprüngliche Struktur des physikalischen Hilbertraums als direkte Summe von Sektoren zwischen denen die Felder vermitteln wird wiedererscheinen. Mit anderen Worten, das *reduzierte Feldbündel* erfüllt das Programm zur Rekonstruktion der Feldalgebra.

Wir Starten von folgender Definition:

Definition 21.1 *Die direkte Summe von Hilberträumen*

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}} \equiv \bigoplus_{\rho_{\mathrm{I}} \in \bigtriangledown_0} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\rho_{\mathrm{I}}} \,, \tag{21.1}$$

heißt **reduziertes Zustandsbündel**[4)] *Die Elemente von* $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}}$ *werden geschrieben als* $\boldsymbol{\Psi} = (\rho_{\mathrm{I}}, \Psi)$, *um sie von denen von* $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ *zu unterscheiden.* $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}}$ *trage das von* $\mathfrak{H}_0$ *induzierte Skalarprodukt:*

$$(\rho_{\mathrm{I}}, \Phi)\,,\ (\rho_{\mathrm{J}}, \Psi) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}} \longmapsto (\,(\rho_{\mathrm{I}}, \Phi), (\rho_{\mathrm{J}}, \Psi)\,) \equiv \delta_{\mathrm{IJ}} \langle \Phi | \Psi \rangle \,. \tag{21.2}$$

4) Der Begriff „Bündel" ist hier eigentlich unangebracht.

Eine Feldalgebra sollte nun durch lineare Operatoren auf $\mathcal{H}_{\text{red}}$ wirken und von einem Sektor auf den anderen abbilden. Die Idee dazu ist diese: Betrachte einen Kanal $e = ({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{J}})$ und ein $(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi) \in \mathcal{H}_{\rho_{\mathrm{I}}}$, d.h. wir starten bei der Quelle von e. Im normalen Feldbündel würde nun ein Feld $\{\rho_{\mathrm{J}}, A\}$ mit Ladung ρ_{J} so wirken:

$$\{\rho_{\mathrm{J}}, A\}.\{\rho_{\mathrm{I}}, \Psi\} = \{\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}(A)\Psi\}.$$

Durch Anwendung von $\boldsymbol{T}^*_e$ können wir jetzt aber die Zielfaser erreichen:

$$\boldsymbol{T}^*_e.\{\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}(A)\Psi\} = \{\rho_{\mathrm{K}}, T^*_e\rho_{\mathrm{I}}(A)\Psi\}.$$

Das motiviert die Definiton von linearen Operatoren auf dem reduzierten Zustandsbündel, die vom Quell- zum Zielsektor abbilden.

Definition 21.2 *Das* **reduzierte Feldbündel** $\mathcal{F}$ *ist der Abschluß in der Operatornorm der direkten Summe von Vektorräumen*

$$\mathcal{F} \equiv \overline{\bigoplus_e \mathsf{e}} \equiv \overline{\bigoplus_e (e, \mathfrak{A})}, \tag{21.3}$$

für alle Kanäle e mit Komponenten in $\bigtriangledown_0$. Dabei ist jedes $\mathsf{e} = (e, A)$, $A \in \mathfrak{A}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}_{\text{red}}$:

$$(e, A)(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi) \equiv \delta_{\rho_{\mathrm{I}} s(e)}(r(e), T^*_e\rho_{\mathrm{I}}(A)\Psi). \tag{21.4}$$

Es ist festzuhalten, daß die Bedingung $\delta_{\rho_{\mathrm{I}} s(e)}(r(e)$ ad hoc eingeführt wurde, um die Ortogonalität der Sektoren zu sichern. Darauf kommen wir später noch zurück.

Die Einbettung der Observablenalgebra ist nun nicht mehr so simpel, wie im Feldbündel, aber immer noch natürlich:

Bemerkung 21.3 *i) $\mathfrak{A}$ ist kanonisch eingebettet in $\mathcal{F}$ mittels der Abbildung*

$$\begin{aligned} \iota_{\mathfrak{A}} &: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{F}, \\ A &\longmapsto \iota_{\mathfrak{A}}(A) \equiv \sum_{e,\, c(e)=0} (e, A). \end{aligned} \tag{21.5}$$

ii) $\mathcal{F}$ ist eine Banach-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\text{red}})$. Genauer gesagt gilt:

$$\|(e, A)\| \leq \|A\|, \quad \forall A \in A. \tag{21.6}$$

Beweis: Die Abschätzung ist nach Definition des Skalarprodukts in $\mathcal{H}_{\text{red}}$ klar. ■

Um eine Feld*algebra* zu haben, ist es natürlich notwendig, daß $\mathcal{F}$ abgeschlossen ist unter Produktbildung.

Satz 21.4 *Seien $\mathsf{e}_1 = (e_1, A_1)$, $\mathsf{e}_2 = (e_2, A_2) \in \mathcal{F}$ mit $c(e_i) = \rho_i$, $i = 1, 2$. Dann gilt die folgende* **Operatorproduktentwicklung** *(OPE):*

$$(e_1, A_1)(e_2, A_2) = \delta_{r(e_1)s(e_2)} \sum_{e,\, f} F_{e_1 \circ e_2; f; e} \cdot (e, A_f), \tag{21.7}$$

in Anwendung auf Zustände aus $\mathcal{H}_{\text{red}}$. Dabei ist

$$A_f \equiv T^*_f \rho_1(A_2) A_1 \in \mathfrak{A}, \tag{21.8}$$

und die Summe läuft über alle f mit $s(f) = \rho_1 = c(e_1)$ und $c(f) = \rho_2 = c(e_2)$ sowie über alle e mit $r(e) = r(e_2)$ und $c(e) = r(f)$.

Beweis: Das ist eine einfache Rechnung:

$$
\begin{aligned}
(e_2,A_2)(e_1,A_1)(\rho_{\mathrm{I}},\Psi) &= \delta_{\rho_{\mathrm{I}}s(e_1)}(e_2,A_2)(r(e_1),T^*_{e_1}\rho_{\mathrm{I}}(A_1)\Psi) = \\
&= \delta_{r(e_1)s(e_2)}(r(e_2),T^*_{e_2}\,r(e_1)(A_2)\,T^*_{e_1}\rho_{\mathrm{I}}(A_1)\Psi) = \\
&= \delta_{r(e_1)s(e_2)}(r(e_2),T^*_{e_2}T^*_{e_1}\rho_{\mathrm{I}}(\rho_1(A_2)A_2)\Psi)\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir zuletzt die Intertwinereigenschaft von $T^*_{e_1}$ benutzt haben. Wir fügen jetzt eine vollständige Eins vor dem Intertwinerpaar $T^*_{e_2}T^*_{e_1}$ ein, die an die Ladungen von $e_1\circ e_2$ anschließt, d.h. wir rechnen weiter mit $s(f)=c(e_1)=\rho_1$, $c(f)=c(e_2)=\rho_2$:

$$
\begin{aligned}
(e_2,A_2)(e_1,A_1)(\rho_{\mathrm{I}},\Psi) &= \delta_{r(e_1)s(e_2)}\sum_f(r(e_2),T^*_{e_2}T^*_{e_1}\rho_{\mathrm{I}}(T_fT^*_f)\rho_{\mathrm{I}}(\rho_1(A_2)A_2)\Psi) = \\
&= \delta_{r(e_1)s(e_2)}\sum_f(r(e_2),T^*_{e_2}T^*_{e_1}\rho_{\mathrm{I}}(T_f)\rho_{\mathrm{I}}(A_f)\Psi) = \\
&= \delta_{r(e_1)s(e_2)}\sum_{e\,,\,f}(r(e_2),T^*_{e_2}T^*_{e_1}\rho_{\mathrm{I}}(T_f)T_eT^*_e\rho_{\mathrm{I}}(A_f)\Psi) = \\
&= \delta_{r(e_1)s(e_2)}\sum_{e\,,\,f}F_{e_1\circ e_2;f;e}(r(e_2),T^*_e\rho_{\mathrm{I}}(A_f)\Psi) = \\
&= \delta_{r(e_1)s(e_2)}\sum_{e\,,\,f}F_{e_1\circ e_2;f;e}(e,A_f).(\rho_{\mathrm{I}},\Psi)\,,
\end{aligned}
$$

wobei nach denselben Regeln wie oben eine Identität eingefügt wurde. Für die Summation über e folgen damit die erwünschten Beschränkungen $s(e)=\rho_{\mathrm{I}}=s(e_1)$, $c(e)=r(f)$ und $r(e)=r(e_2)$ (Das bedeutet, die Summation über e ist nur eine Summation über den Vielfachheitsindex). ■

In §23 werden wir sehen, daß $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ tatsächlich eine C*-Algebra ist, die von den Elementen (e,A) dicht aufgespannt wird.

Lokalität läßt sich im reduzierten Feldbündel fast genauso wie in $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ausdrücken:

Definition und Bemerkung 21.5 *Ein Feld* $\mathbf{e}=(e,A)\in\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *heißt* **lokalisiert in** $\mathcal{O}$, *in Zeichen* $\mathbf{e}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{O})$, *wenn es in Anwendung auf jeden Zustand aus* $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}}$ *mit jeder Observable* (e_1,B) , $B\in\mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ *kommutiert. Diese Definition ist äquivalent zu: Es exisiert ein unitärer Intertwiner* U *von* $\rho=c(e)$ *nach* $\hat{\rho}\in\Delta_0(\mathcal{O})$ *und* UA *ist in* $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ *(vgl. Satz 12.13).*

Beweis: Wir wollen möglichst (12.12) aus obengenanntem Satz reproduzieren. Die einzige Schwierigkeit dabei ist die nichttriviale Einbettung der Observablen in $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Betrachten wir also ein $(\rho_{\mathrm{I}},\Psi)\in\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}}$ und wenden darauf zuerst die Observable (e_1,B) und dann das Feld an, so erhalten wir:

$$
\sum_{e_1\,,\,c(e_1)=0}(e,A)(e_1,B)(\rho_{\mathrm{I}},\Psi)=(r(e),T^*_es(e)(A)\rho_{\mathrm{I}}(B)\Psi)\,, \tag{21.9}
$$

denn da $c(e)=\iota$ folgt $T_{e_1}=\mathbb{1}$ (es ist $e_1=\left({}_{\mathrm{I}}{}^{s(e)}{}_0\right)$). Kehren wir die Reihenfolge der Anwendung von Feld und Observable um so ergibt sich auf gleiche Weise

$$
\sum_{e_1\,,\,c(e_1)=0}(e_1,B)(e,A)(\rho_{\mathrm{I}},\Psi)=(r(e_1),r(e)(B)T^*_e\rho_{\mathrm{I}}(A)\Psi) \tag{21.10}
$$

Damit die rechten Seiten von (21.9) und (21.10) gleich sein können, muß natürlich $r(e_1)=r(e)$ gelten. Damit erhalten wir unter Ausnutzung der Intertwinereigenschaft von T^*_e die Gleichung

$$
T^*_e\rho_{\mathrm{I}}(AB)=T^*_e\rho_{\mathrm{I}}(c(e)(B)A)\,, \tag{21.11}
$$

als zur Lokalisierung des Feldes in $\mathcal{O}$ äquivalente Bedingung. Da T_e eine Isometrie und ρ_{I} irreduzibel ist, ist dies aber äquivalent zu (12.12) mit $\rho = c(e)$. ■

Es ist bemerkenswert, daß die Lokalisierung eines Feldes nur von dessen Ladung abhängt und nicht von den Sektoren, zwischen denen es vermittelt. Das liegt natürlich an der klug gewählten Einbettung der Observablen.

Da jetzt die lokalen Feldalgebren verfügbar sind, kann man die Vertauschungsrelationen raumartig zueinander lokalisierter Felder untersuchen. Es ist nicht überraschend, daß diese eng mit den Zopfmatrizen zusammenhängen.

Satz 21.6 *Seien* $\boldsymbol{e}_i = (e_i, A_i) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$ *und* $\mathcal{O}_1 \between \mathcal{O}_2$. *Dann erfüllen diese Felder die* **Austauschalgebra**

$$(e_2, A_2)(e_1, A_1) = \sum_{e_2' \circ e_1'} B^{(\pm)}_{e_1 \circ e_2, e_2' \circ e_1'} (e_1', A_1)(e_2', A_2), \tag{21.12}$$

mit dem Vorzeichen $(+)$ *falls* $\mathcal{O}_1 > \mathcal{O}_2$ *und* $(-)$ *anderenfalls.*

Beweis: Die linke Seite auf ein $(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi)$ anwendend, erhalten wir

$$(r(e_2), T^*_{e_2} T^*_{e_1} \rho_{\mathrm{I}}(\rho_1(A_2)A_1)\Psi), \tag{21.13}$$

mit $c(e_i) = \rho_i$, $i = 1, 2$. Andererseits erhalten wir für die rechte Seite

$$\sum_{e_2' \circ e_1'} (r(e_2'), T^*_{e_2} T^*_{e_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_2', \rho_1')) T_{e_2'} T_{e_1'} T^*_{e_1'} T^*_{e_2'} \rho_{\mathrm{I}}(\rho_2'(A_1)A_2)\Psi),$$

und das ist mit $c(e_i') = \rho_i' = \rho_i$, $i = 1, 2$:

$$(r(e_2), T^*_{e_2} T^*_{e_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_2, \rho_1)\rho_2(A_1)A_2)\Psi). \tag{21.14}$$

Wegen der Lokalisierung der Felder und obiger Bmerkung kann $A_i = U_i^{-1} C_i$ geschrieben werden mit $C_i \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_i)$ und einem unitären Intertwiner $U_i \in (\widehat{\rho}_i|\rho_i)$. Damit ist außerdem $\varepsilon^{\pm}(\rho_2, \rho_1) = \rho_1(U_2^{-1}))U_1^{-1} U_2 \rho_2(U_1)$, je nachdem ob $\mathcal{O}_1 > \mathcal{O}_2$ oder $\mathcal{O}_2 > \mathcal{O}_1$. Mit alldem rechnet man leicht die Gleichheit von (21.13) und (21.14) nach. ■

Damit lassen sich die Polynomialgleichungen des letzten Abschnittes direkt als Beziehungen in $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ auffassen. Zum Beispiel sagt dann die Pentagonidentität, daß man in einem Produkt zweier Felder zunächst eines der Felder mit einer Fusionsmatrix in ein Produkt von zweien auflösen und dann diese beiden nacheinander mit dem anderen zopfen, oder aber die Felder zuerst zopfen und dann eines auflösen kann — man hätte die Polynomialglgeichungen natürlich auch gleich in $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ beweisen können.

Jetzt betrachten wir als letzte grundlegende Eigenschaft die Kovarianz im reduzierten Feldbündel. Was wir bekommen, ist genau die Darstellung aus Satz 12.8 allerdings mit dem Vorteil, daß die Felder nun manifest kovariant sind im Sinne von Axiom IV.

Satz und Definition 21.7 *i) Die Darstellung* $L \longmapsto U(L)$ *der Poincarégruppe auf* $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}}$ *wird definiert durch die auf* $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ *aus Satz 12.8i). Dann definiert*

$$\mathcal{P} \ni L \longmapsto \alpha_L : \quad \alpha_L(e, A) \equiv (e, X_L(c(e))^{-1} \alpha_L(A)), \tag{21.15}$$

eine Darstellung der Poincarégruppe auf $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *und es gilt*

$$\alpha_L(e, A) = U(L)(e, A)U(L)^{-1}. \tag{21.16}$$

ii) $\alpha_L \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{O}) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(L\mathcal{O})$.

Beweis: Erinnern wir uns an Satz 11.9iii), so können wir die Wirkung von $\alpha_L \boldsymbol{e}$ auf einen Zustand $(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi)$ ausrechnen (mit $c(e) = \rho$):

$$\begin{aligned}(\alpha_L \boldsymbol{e})(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi) &= (r(e), T_e^* \rho_{\mathrm{I}}(X_L(\rho)^{-1} \alpha_L(A))\Psi) = \\ &= (r(e), T_e^* \rho_{\mathrm{I}}(X_L(\rho))^{-1} U_{\rho_{\mathrm{I}}}(L) U_{\rho_{\mathrm{I}}}(L)^{-1} \rho_{\mathrm{I}} \alpha_L(A)\Psi) = \\ &= (r(e), T_e^* U_{\rho_{\mathrm{I}}\rho}(L) U_{\rho_{\mathrm{I}}}(L)^{-1} \rho_{\mathrm{I}} \alpha_L(A)\Psi) = \\ &= (r(e), U_{r(e)}(L) T_e^* \rho_{\mathrm{I}}(A) U_{\rho_{\mathrm{I}}}(L)^{-1}\Psi) = U(L)\, \boldsymbol{e}\, U(L)^{-1}(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi)\,.\end{aligned}$$

ii) wird unter Ausnutzung von (21.10) analog zur entsprechenden Aussage für $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ gezeigt (vgl. Satz 12.14). ■

§22 Strukturkonstanten und Operationen auf Kanälen

In diesem Abschnitt stellen wir einige technische Hilfsmittel bereit, die wir für die Einführung einer sinnvollen Ladungskonjugation auf dem reduzierten Feldbündel und damit für dessen bessere physikalische Interpretation benötigen. Er kann als Referenz angesehen und zunächst übergangen werden.

Zunächst führen wir die drei natürlichen „Konjugationen" auf superselection-Kanälen ein.

Definition 22.1 *Für einen Kanal* $e = \left(\begin{smallmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{I} & & \rho \end{smallmatrix}\right)$ *definieren wir die Operationen:*

$$\begin{aligned} e^* &\equiv \left(\begin{smallmatrix} & \mathrm{I} & \\ \mathrm{K} & & \overline{\rho} \end{smallmatrix}\right)\,, \\ \widehat{e} &\equiv \left(\begin{smallmatrix} & \overline{\mathrm{I}} & \\ \overline{\mathrm{K}} & & \rho \end{smallmatrix}\right)\,, \qquad\qquad (22.1) \\ \overline{e} &\equiv \left(\begin{smallmatrix} & \overline{\mathrm{K}} & \\ \overline{\mathrm{I}} & & \overline{\rho} \end{smallmatrix}\right) = \widehat{e^*} = \widehat{e}^*\,. \end{aligned}$$

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß $e \mapsto e^*$ die übliche lineare Operatoradjunktion in $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ induziert, während $\overline{e}$ als die physikalisch relevante „Ladungskonjugation" interpretiert werden kann.

Eng verknüpft mit diesen Operationen sind eine Reihe von **Strukturkonstanten**

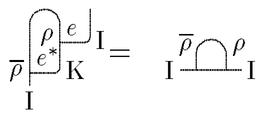
Definition und Bemerkung 22.2 *Für* $e = \left(\begin{smallmatrix} & \iota & \\ \overline{\rho} & & \rho \end{smallmatrix}\right)$ *definieren wir eine Phase*

$$\chi_\rho \cdot \mathbb{1} \equiv d_\rho \cdot \overline{\rho}(R_{\overline{\rho}}^*) R_\rho = d_\rho \cdot R_{\overline{\rho}}^* \rho(R_\rho) = \omega_\rho \cdot R_{\overline{\rho}}^* \varepsilon^+(\overline{\rho}, \rho) R_\rho\,. \qquad (22.2\mathrm{i})$$

Weiter setzen wir für $e = \left(\begin{smallmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{I} & & \rho \end{smallmatrix}\right)$

$$\eta_{ee^*} \cdot \mathbb{1} \equiv \rho_{\mathrm{I}}(R_{\overline{\rho}}^*) T_e T_{e^*} \in (\rho_{\mathrm{I}}|\rho_{\mathrm{I}}) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}\,, \qquad (22.2\mathrm{ii})$$

was graphisch dargestellt wird durch

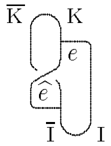
$\eta_{ee^*} =$ 

Außerdem

$$\begin{aligned}\theta^{e}_{\widehat{e}} \cdot \mathbb{1} &\equiv \sqrt{\frac{\omega_\rho \omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{I}}}}\, R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_e \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho) T_{\widehat{e}}) R_{\overline{\mathrm{I}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_\rho \omega_{\mathrm{K}}}}\, R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_e \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho, \rho_{\overline{\mathrm{K}}})^* T_{\widehat{e}}) R_{\overline{\mathrm{I}}} \in (\iota|\iota) = \mathbb{C}\cdot \mathbb{1}\,,\end{aligned} \tag{22.2iii}$$

graphisch:

$$\theta^{e}_{\widehat{e}} = \sqrt{\frac{\omega_\rho \omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{I}}}} \cdot$$

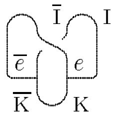


Schließlich

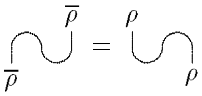
$$\zeta_{e\overline{e}} \cdot \mathbb{1} \equiv \sum_{e^*} \theta^{e^*}_{\overline{e}} \eta_{ee^*} \cdot \mathbb{1} = \sqrt{\frac{\omega_\rho \omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{K}}}}\, R^*_{\overline{\rho}} R^*_{\overline{\mathrm{I}}} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}, \rho)^*) T_e \rho_{\mathrm{K}}(T_{\overline{e}}) R_{\overline{\mathrm{K}}} \in (\iota|\iota) = \mathbb{C}\cdot \mathbb{1}\,, \tag{22.2iv}$$

graphisch:

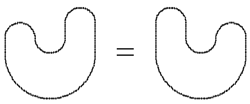
$$\zeta_{e\overline{e}} = \sqrt{\frac{\omega_\rho \omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{K}}}} \cdot$$



Beweis: In (22.2i) ist nur das erste Gleichheitszeichen nach der Definition nichttrivial. Die graphische Darstellung dieser Gleichheit ist



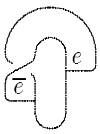
Da ρ und $\overline{\rho}$ irreduzibel sind kann man diese Identität von Skalaren umformen in



was offensichtlich richtig ist. Wir haben nun nur noch die Identitäten der verschiedenen Darstellungen in (22.2iii) und (22.2iv) zu zeigen. Zu (22.2iv): Fügt man den Intertwiner η_{ee^*} direkt nach dem ganz links stehenden $R^*_{\overline{\mathrm{I}}}$ in $\theta^{e^*}_{\overline{e}}$ ein, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\zeta_{e\overline{e}} \cdot \mathbb{1} \equiv \sum_{e^*} \theta^{e^*}_{\overline{e}} \eta_{ee^*} \cdot \mathbb{1} &= \sqrt{\frac{\omega_\rho \omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{K}}}} \cdot \sum_{e^*} R^*_{\overline{\mathrm{I}}} \rho_{\mathrm{I}}(R^*_{\overline{\rho}}) T_e T_{e^*} T^*_{e^*} \rho_{\mathrm{K}}(\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \overline{\rho}) T_{\overline{e}}) R_{\overline{\mathrm{K}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega_\rho \omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{K}}}} \cdot R^*_{\overline{\mathrm{I}}} \rho_{\mathrm{I}}(R^*_{\overline{\rho}}) T_e \rho_{\mathrm{K}}(\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \overline{\rho}) T_{\overline{e}}) R_{\overline{\mathrm{K}}}\,.\end{aligned}$$

Was wir nun haben ist graphisch (unter Vernachlässigung der Phase)



was man unter Verwendung der Regeln aus Thm.16.5 leicht zu der behaupteten Darstellung von $\zeta_{e\overline{e}}$ umformen kann. ■

Die Stellung der Indizes dieser Matrizen ist nicht zufällig: z.B. transformiert sich $\theta^{e}_{\widehat{e}}$ kovariant beim Wechsel der Basis $T_{\widehat{e}}$ und kontravariant unter einem Wechsel der Basis T_e. Zu der Phase χ_ρ ist noch ein Wort zu verlieren: Ist ρ nicht selbstkonjugiert, so kann man immer durch Wahl von $R_\rho = R$, $R_{\overline{\rho}} = \varepsilon^+(\overline{\rho},\rho)R = \overline{R}_\rho$ die übliche Situation wiederherstellen, in der $\chi_\rho = \omega_\rho$ gilt (siehe Satz 14.4; man kann natürlich auch $\chi_\rho = 1$ wählen). Im allgemeinen kann diese Phase aber von der Basiswahl in den Intertwinerräumen abhängen — also von der Phase von $R_{\overline{\rho}}$ relativ zu R_ρ.

Lemma 22.3 *Sei* $e = \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\rho}\right)$. *Dann gelten die folgenden Identitäten (Summation über wiederholte Indizes):*

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \eta_{ee^*}(\eta_{fe^*})^* = \frac{d_{\mathrm{K}}}{d_{\mathrm{I}}d_\rho}\delta_{ef}\,,\\
&\text{(b)} \quad \theta^{e}_{\widehat{e}}(\theta^{f}_{\widehat{e}})^* = \delta_{ef}\,,\\
&\text{(c)} \quad \zeta_{e\overline{e}}(\zeta_{e\overline{f}})^* = \frac{d_{\mathrm{K}}}{d_{\mathrm{I}}d_\rho}\delta_{ef}\,.
\end{aligned} \tag{22.3}$$

Und weiterhin

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \eta_{ee^*} = \chi_\rho\frac{d_{\mathrm{K}}}{d_{\mathrm{I}}}\cdot\eta_{e^*e}\,,\\
&\text{(b)} \quad \theta^{e}_{\widehat{e}} = \frac{\chi_{\mathrm{K}}}{\chi_{\mathrm{I}}}\cdot(\theta^{\widehat{e}}_{e})^*\,,\\
&\text{(c)} \quad \zeta{e\overline{e}} = \frac{\chi_\rho\chi_{\mathrm{I}}}{\chi_{\mathrm{K}}}\cdot\zeta_{\overline{e}e}\,.
\end{aligned} \tag{22.4}$$

Beweis: Zunächst zu (22.3). Für (a) rechnen wir aus:

$$\sum_{e^*}\eta_{ee^*}(\eta_{fe^*})^*\cdot 1\!\!1 = \sum_{e^*}\phi_{\mathrm{I}}(\eta_{ee^*}(\eta_{fe^*})^*\cdot 1\!\!1) = \sum_{e^*}R^*_{\overline{\rho}}\phi_{\mathrm{I}}(T_eT_{e^*}T^*_{e^*}T^*_f)R_{\overline{\rho}} = \frac{d_{\mathrm{K}}}{d_{\mathrm{I}}d_\rho}\delta_{ef}\cdot 1\!\!1\,,$$

unter Verwendung von (18.17). Für (b) mit $f = \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{L}}{}_{\rho}\right)$:

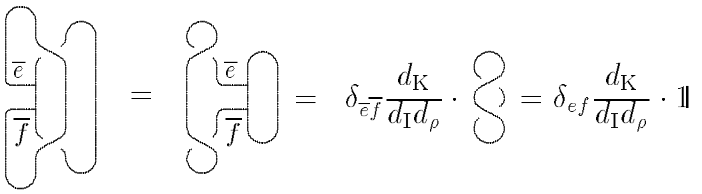
$$\begin{aligned}
\sum_{\widehat{e}}\theta^{e}_{\widehat{e}}(\theta^{f}_{\widehat{e}})^*\cdot 1\!\!1 &= \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{L}}}}\cdot\sum_{\widehat{e}}R^*_{\overline{\mathrm{K}}}T^*_e\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\mathrm{K}},\rho)T_{\widehat{e}})R_{\overline{\mathrm{I}}}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(T^*_{\widehat{e}}\varepsilon(\rho_{\mathrm{K}},\rho)^*)T_fR_{\overline{\mathrm{K}}} =\\
&= \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{L}}}}\cdot\sum_{\widehat{e}}R^*_{\overline{\mathrm{K}}}T^*_e\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\mathrm{K}},\rho)T_{\widehat{e}}T^*_{\widehat{e}}\varepsilon(\rho_{\mathrm{K}},\rho)^*)T_fR_{\overline{\mathrm{K}}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{L}}}}\cdot R^*_{\overline{\mathrm{K}}}T^*_eT_fR_{\overline{\mathrm{K}}} =\\
&= \delta_{ef}\cdot 1\!\!1\,.
\end{aligned}$$

Dabei konnten wir $R_{\overline{\mathrm{I}}}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}$ mit folgendem Argument eliminieren: Ersetzt man diese Kombination durch $1\!\!1 = \sum_e T_eT^*_e$ mit $s(e) = \overline{c(e)} = \mathrm{I}$, so trägt nur der Term mit $r(e) = 0$ bei, denn der ganze Teil $R^*_{\overline{\mathrm{K}}}\ldots T_e$ ist in $(\iota|r(e))$ und dieser Intertwinerraum verschwindet für $r(e) \neq \iota$. Wir werden solche Argumente im folgenden wiederholt benutzen. Nun zu (c), mit derselben

Notation wie zuvor:

$$\begin{aligned}\sum_e \zeta_{e\bar e}(\zeta_{e\bar f})^* &= \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm L}}{\omega_{\mathrm K}}}\cdot \sum_e R^*_{\bar\rho} R^*_{\bar{\mathrm I}}\rho_{\mathrm I}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm I}},\rho)^*)T_e\rho_{\mathrm K}(T_{\bar e})R_{\overline{\mathrm K}}R^*_{\overline{\mathrm K}}\rho_{\mathrm K}(T^*_{\bar f})T^*_e\rho_{\mathrm I}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm I}},\rho))R_{\bar{\mathrm I}}R_{\bar\rho} =\\ &= \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm L}}{\omega_{\mathrm K}}}\cdot \sum_e R^*_{\bar\rho} R^*_{\bar{\mathrm I}}\rho_{\mathrm I}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm I}},\rho)^*)T_e\rho_{\mathrm K}(T_{\bar e}T^*_{\bar f})T^*_e\rho_{\mathrm I}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm I}},\rho))R_{\bar{\mathrm I}}R_{\bar\rho} =\\ &= \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm L}}{\omega_{\mathrm K}}}\cdot \sum_e R^*_{\bar\rho} R^*_{\bar{\mathrm I}}\rho_{\mathrm I}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm I}},\rho)^*)\rho_{\mathrm I}\rho(T_{\bar e}T^*_{\bar f})T_eT^*_e\rho_{\mathrm I}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm I}},\rho))R_{\bar{\mathrm I}}R_{\bar\rho} =\\ &= \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm L}}{\omega_{\mathrm K}}}\cdot R^*_{\bar\rho} R^*_{\bar{\mathrm I}}\rho_{\mathrm I}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm I}},\rho)^*)\rho_{\mathrm I}\rho(T_{\bar e}T^*_{\bar f})\rho_{\mathrm I}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm I}},\rho))R_{\bar{\mathrm I}}R_{\bar\rho},\end{aligned}$$

wobei $R_{\overline{\mathrm K}}R^*_{\overline{\mathrm K}}$ und $T_eT^*_e$ wie oben weggelassen werden konnten. Unter Vernachlässigung der Phase rechnen wir graphisch weiter:



Die eben gezeigte Invertierbarkeit der Matrizen benutzen wir jetzt, um (22.4) zu sehen. Bei (a) rechnen wir für die linke Seite

$$\begin{aligned}\sum_e \eta_{ee^*}(\eta_{e^*e})^* &= \sum_e \rho_{\mathrm I}(R^*_{\bar\rho})T_e(T^*_eT^*_{e^*}\rho_{\mathrm K}(R_\rho))T_{e^*} = \rho_{\mathrm I}(R^*_{\bar\rho})T^*_{e^*}\rho_{\mathrm K}(R_\rho)T_{e^*} =\\ &= T^*_{e^*}\rho_{\mathrm K}(\bar\rho(R^*_{\bar\rho})R_\rho)T_{e^*} = \frac{\chi_\rho}{d_\rho}\cdot 1\!\!1\,.\end{aligned}$$

Andererseits bekommen wir aus (22.3a) für die rechte Seite

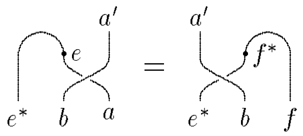
$$\sum_e \eta_{e^*e}(\eta^*_{e^*e}) = \frac{d_{\mathrm I}}{d_{\mathrm K}d_\rho}\,,$$

und Vergleichen liefert das gewünschte Ergebnis. (b) und (c) sieht man analog. ■

Satz 22.4 *Die Strukturkonstanten sind (unter anderem) über folgende Symmetrien mit den B- und F-Matrizen verknüpft (wiederum gilt Summation über wiederholte Indizes):*

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} && \eta_{ee^*}B^{(\pm)}_{a'\circ e,a\circ b} = B^{(\mp)}_{f^*\circ a',b\circ e^*}\eta_{ff^*}\,,\\
&\text{(b)} && \eta_{e'e'^*}\eta_{ee^*}B^{(\pm)}_{e'\circ e,f'\circ f} = B^{(\pm)}_{f'^*\circ f^*,e^*\circ e'^*}\eta_{f'f'^*}\eta_{ff^*}\,,\\
&\text{(c)} && \eta_{e_2e_2^*}F_{e\circ e_2;f;e_1} = \left(F_{e_1\circ e_2^*;f^*;e}\right)^*\eta_{ff^*}\,,\\
&\text{(d)} && \zeta_{e_1\bar e_1}\zeta_{e_2\bar e_2}B^{(\pm)}_{\bar e_1'\circ\bar e_2',\bar e_1\circ\bar e_2} = \left(B^{(\mp)}_{e_1'\circ e_2',e_1\circ e_2}\right)^*\zeta_{e_2'\bar e_2'}\zeta_{e_1'\bar e_1'}\,,\\
&\text{(e)} && \theta^{e_1'}_{\widehat{e_1'}}\theta^{e_2'}_{\widehat{e_2'}}B^{(\pm)}_{\widehat{e_2'}\circ\widehat{e_1'},\widehat{e_2}\circ\widehat{e_1}} = B^{(\pm)}_{e_1'\circ e_2',e_1\circ e_2}\theta^{e_1}_{\widehat{e_1}}\theta^{e_2}_{\widehat{e_2}}\,,\\
&\text{(f)} && \zeta_{e_1\bar e_1}\zeta_{e_2\bar e_2}F_{\bar e_1\circ\bar e_2;f;e} = \left(F_{e_1\circ e_2;f;e}\right)^*\zeta_{f\bar f}\zeta_{e\bar e}\,.
\end{aligned}\tag{22.5}$$

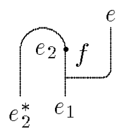
Beweis: (a) ist eine Polynomialgleichung mit der sehr speziellen Fusionsmatrix η (beachte die zweite graphische Darstellung von η). Diese können wir leicht aus der entsprechenden Intertwineridentität herleiten, wenn wir die Darstellung aus Fig.20.1 benutzen:



(b) entsteht durch Iteration von (a):

$$\eta_{e'e'^*}\eta_{ee^*}B^{(\pm)}_{e'\circ e,f'\circ f} = \eta_{e'e'^*}B^{(\mp)}_{f^*\circ e',f\circ e^*}\eta_{ff^*} = B^{(\pm)}_{f'^*\circ f^*,e^*\circ e'^*}\eta_{f'f'^*}\eta_{ff^*}\,.$$

(c) erhalten wir aus der Definitionsgleichung $\rho_{\mathrm{I}}(R^*_{\overline{\rho}})T_f = \eta_{ff^*}T^*_{f^*}$. Wandeln wir zunächst die linke Seite wie oben in Polynomialform um, so erhalten wir



was die linke Seite von (c) ist. Verfährt man mit $T^*_{f^*}$ auf der rechten Seite genauso und setzt die äußeren Indizes gleich so ergibt sich (c). Der Beweis von (d) ist etwas aufwendiger, im Prinzip aber einfach, wenn man sich von der graphischen Intuition leiten läßt (der Leser sei aufgefordert, die einzelnen Schritte graphisch nachzuvollziehen). Legen wir zunächst die Notation fest:

$$e_1 = (\,{}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{L}}{}_{\rho_2})\,,\quad e_2 = (\,{}_{\mathrm{L}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\rho_1})\,,\quad e'_1 = (\,{}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{\rho_1})\,,\quad e'_2 = (\,{}_{\mathrm{J}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\rho_2})\,.$$

Jetzt schreiben wir als erstes die linke Seite hin, wobei wir den Intertwineranteil der Zopfmatrix, der in $(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}|\rho_{\overline{\mathrm{K}}})$ ist, an geeigneter Stelle einfügen. Wir vernachlässigen dabei den Phasenfaktor $\sqrt{\frac{\omega_{\rho_1}\omega_{\rho_2}\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{K}}}}$, der mit dem auf der rechten Seite übereinstimmt:

$$
\begin{aligned}
&R^*_{\overline{\rho}_1}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e'_1}\rho_{\mathrm{J}}(T_{\overline{e}'_1})R_{\overline{\mathrm{J}}}R^*_{\overline{\rho}_2}R^*_{\overline{\mathrm{J}}}\rho_{\mathrm{J}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}},\rho_2)^*)T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(T_{\overline{e}'_2}T^*_{\overline{e}'_2}T^*_{\overline{e}'_1}\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_1))T_{\overline{e}_1}T_{\overline{e}_2})R_{\overline{\mathrm{K}}}\\
&= R^*_{\overline{\rho}_1}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e'_1}\rho_{\mathrm{J}}(T_{\overline{e}'_1})R_{\overline{\mathrm{J}}}R^*_{\overline{\rho}_2}R^*_{\overline{\mathrm{J}}}\rho_{\mathrm{J}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}},\rho_2)^*)T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(T^*_{\overline{e}'_1}\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_1))T_{\overline{e}_1}T_{\overline{e}_2})R_{\overline{\mathrm{K}}}\\
&= R^*_{\overline{\rho}_1}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e'_1}\rho_{\mathrm{J}}(T_{\overline{e}'_1})R_{\overline{\mathrm{J}}}R^*_{\overline{\mathrm{J}}}\rho_{\mathrm{J}}(\rho_{\overline{\mathrm{J}}}(R^*_{\overline{\rho}_2})\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}},\rho_2)^*)T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(T^*_{\overline{e}'_1}\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_1))T_{\overline{e}_1}T_{\overline{e}_2})R_{\overline{\mathrm{K}}}\\
&= R^*_{\overline{\rho}_1}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e'_1}\rho_{\mathrm{J}}(T_{\overline{e}'_1}\rho_{\overline{\mathrm{J}}}(R^*_{\overline{\rho}_2})\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}},\rho_2)^*)T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(T^*_{\overline{e}'_1}\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_1))T_{\overline{e}_1}T_{\overline{e}_2})R_{\overline{\mathrm{K}}}\,,
\end{aligned}
$$

wobei $T_{\overline{e}'_2}T^*_{\overline{e}'_2}$ durch $\mathbb{1} = \sum_e T_eT^*_e$ mit $e = (\,{}_{\overline{\mathrm{J}}}{}^{r(e)}{}_{\overline{\rho}_2})$ ersetzt werden konnte, denn die Summe über e bricht zusammen: Der Teil $\rho_{\mathrm{K}}(T^*_e\ldots)R_{\overline{\mathrm{K}}}$ ist dann in $(\rho_{\mathrm{K}}r(e)|\iota)$ und $N^0_{\mathrm{K}\,r(e)} = 0$ für $r(e) \neq \rho_{\overline{\mathrm{K}}}$. Ebenso wurde $R_{\overline{\mathrm{J}}}$ entfernt. Sodann schieben wir $T^*_{\overline{e}'_1}$ etwas nach links:

$$\rho_{\mathrm{J}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}},\rho_2)^*))T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(T^*_{\overline{e}'_1}) = \rho_{\mathrm{J}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}},\rho_2)^*)\rho_2(T^*_{\overline{e}'_1}))T_{e'_2} = \rho_{\mathrm{J}}(T^*_{\overline{e}'_1}\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1,\rho_2)^*)T_{e'_2}\,,$$

mit den Regeln aus Thm.16.5. Setzen wir dies wieder ein, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&R^*_{\overline{\rho}_1}\,R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e'_1}\rho_{\mathrm{J}}(T_{\overline{e}'_1}\rho_{\overline{\mathrm{J}}}(R^*_{\overline{\rho}_2})T^*_{\overline{e}'_1}\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1,\rho_2)^*)T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_1))T_{\overline{e}_1}T_{\overline{e}_2})R_{\overline{\mathrm{K}}}\\
&\quad= R^*_{\overline{\rho}_1}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e'_1}\rho_{\mathrm{J}}(T_{\overline{e}'_1}T^*_{\overline{e}'_1}\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\overline{\rho}_1(R^*_{\overline{\rho}_2})\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1,\rho_2)^*)T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_1))T_{\overline{e}_1}T_{\overline{e}_2})R_{\overline{\mathrm{K}}}\\
&\quad= R^*_{\overline{\rho}_1}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e'_1}\rho_{\mathrm{J}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\overline{\rho}_1(R^*_{\overline{\rho}_2})\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1,\rho_2)^*)T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_1))T_{\overline{e}_1}T_{\overline{e}_2})R_{\overline{\mathrm{K}}}\\
&\quad= R^*_{\overline{\rho}_2}R^*_{\overline{\rho}_1}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*\rho_1(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1,\rho_2)^*)\rho_2\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\overline{\rho}_2,\overline{\rho}_1)))T_{e'_1}T_{e'_2}\rho_{\mathrm{K}}(T_{\overline{e}_1}T_{\overline{e}_2})R_{\overline{\mathrm{K}}}\,,
\end{aligned}
$$

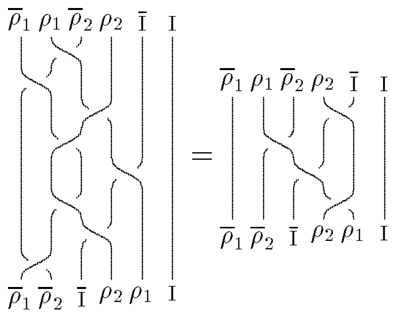
wobei wir $T_{\overline{e}'_1} T^*_{\overline{e}'_1}$ eliminiert und zuletzt noch die Fusionierer nach links und rechts verschoben haben. Bringen wir nun die rechte Seite auf eine analoge Form:

$$\begin{aligned}
&R^*_{\overline{\rho}_2} R^*_{\overline{\mathrm{I}}} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}, \rho_2)^*) T_{e_1} \rho_{\mathrm{L}}(T_{\overline{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{L}}} R^*_{\overline{\rho}_1} R^*_{\overline{\mathrm{L}}} \rho_{\mathrm{L}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{L}}}, \rho_1)^*) T_{e_2} \rho_{\mathrm{K}}(T_{\overline{e}_2}) T^*_{e_2} T^*_{e_1} \rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_1, \rho_2)) T_{e'_1} T_{e'_2} R_{\overline{\mathrm{K}}} \\
&\quad = R^*_{\overline{\rho}_2} R^*_{\overline{\mathrm{I}}} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}, \rho_2)^*) T_{e_1} \rho_{\mathrm{L}}(T_{\overline{e}_1}) \rho_{\mathrm{L}}(\rho_{\overline{\mathrm{L}}}(R^*_{\overline{\rho}_1}) \varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{L}}}, \rho_1)^* \rho_1(T_{\overline{e}_2})) T^*_{e_1} \rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_1, \rho_2)) T_{e'_1} T_{e'_2} R_{\overline{\mathrm{K}}} \\
&\quad = R^*_{\overline{\rho}_1} R^*_{\overline{\rho}_2} R^*_{\overline{\mathrm{I}}} \rho_{\mathrm{I}}(ve(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}, \rho_2)^* \rho_2(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}} \overline{\rho}_2, \rho_1)^*) \varepsilon^{\pm}(\rho_1, \rho_2)) T_{e'_1} T_{e'_2} \rho_{\mathrm{K}}(T_{\overline{e}_1} T_{\overline{e}_2}) R_{\overline{\mathrm{K}}} .
\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir noch die Reihenfolgen der R^* aneinander anpassen. Das tun wir auf der linken Seite; wir formen um:

$$\begin{aligned}
R^*_{\overline{\rho}_2} R^*_{\overline{\rho}_1} R_{\overline{\mathrm{I}}} &= R^*_{\overline{\rho}_2} \rho_2(R^*_{\overline{\rho}_1}) \varepsilon(\rho_1 \overline{\rho}_1, \rho_2) R_{\overline{\mathrm{I}}} = R^*_{\overline{\rho}_2} \rho_2 \overline{\rho}_2(R^*_{\overline{\rho}_1}) \rho_2(\varepsilon(\overline{\rho}_2, \rho_1 \overline{\rho}_1)^*) \varepsilon(\rho_1 \overline{\rho}_1, \rho_2) R_{\overline{\mathrm{I}}} = \\
&= R^*_{\overline{\rho}_1} R^*_{\overline{\rho}_2} R_{\overline{\mathrm{I}}} \rho_{\mathrm{I}} \rho_{\overline{\mathrm{I}}}(\rho_2(\varepsilon(\overline{\rho}_2, \rho_1 \overline{\rho}_1)^*) \varepsilon(\rho_1 \overline{\rho}_1, \rho_2)) .
\end{aligned}$$

Setzt man das ein, so kann man die Zöpfe auf der linken und rechten Seite direkt vergleichen:



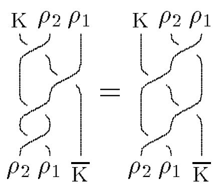
Damit ist (d) gezeigt. (e) rechnet man auf genau dieselbe Weise aus. Zuerst die linke Seite (wieder unter Vernachlässigung der Phase):

$$\begin{aligned}
&R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_{e'_2} \rho_{\mathrm{J}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho_2) T_{\widehat{e'_2}}) R_{\overline{\mathrm{J}}} R^*_{\overline{\mathrm{J}}} T^*_{e'_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}}, \rho_1) T_{\widehat{e'_1}} T^*_{\widehat{e'_1}} T^*_{\widehat{e'_2}} \rho_{\overline{\mathrm{K}}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_1, \rho_2)) T_{\widehat{e}_2} T_{\widehat{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{I}}} = \\
&\quad = R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_{e'_2} \rho_{\mathrm{J}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho_2) T_{\widehat{e'_2}}) T^*_{e'_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}}, \rho_1) T^*_{\widehat{e'_2}} \rho_{\overline{\mathrm{K}}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_1, \rho_2)) T_{\widehat{e}_2} T_{\widehat{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{I}}} = \\
&\quad = R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_{e'_2} T^*_{e'_1} \rho_{\mathrm{I}}(\rho_1(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho_2)) \varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}} \rho_2, \rho_1) T_{\widehat{e'_2}} T^*_{\widehat{e'_2}} \rho_{\overline{\mathrm{K}}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_1, \rho_2)) T_{\widehat{e}_2} T_{\widehat{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{I}}} = \\
&\quad = R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_{e'_2} T^*_{e'_1} \rho_{\mathrm{I}}(\rho_1(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho_2)) \varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}} \rho_2, \rho_1) \rho_{\overline{\mathrm{K}}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_1, \rho_2)) T_{\widehat{e}_2} T_{\widehat{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{I}}} .
\end{aligned}$$

Dann die rechte:

$$\begin{aligned}
&R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_{e'_2} T^*_{e'_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_2, \rho_1)) T_{e_1} T_{e_2} T^*_{e_2} \rho_{\mathrm{L}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho_1) T_{\widehat{e}_2}) R_{\overline{\mathrm{L}}} R^*_{\overline{\mathrm{L}}} T^*_{e_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{L}}}, \rho_2) T_{\widehat{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{I}}} = \\
&\quad = R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_{e'_2} T^*_{e'_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_2, \rho_1)) T_{e_1} \rho_{\mathrm{L}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho_1) T_{\widehat{e}_2}) T^*_{e_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{L}}}, \rho_2) T_{\widehat{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{I}}} = \\
&\quad = R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_{e'_2} T^*_{e'_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_2, \rho_1) \rho_2(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho_1) T_{\widehat{e}_2}) \varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{L}}}, \rho_2) T_{\widehat{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{I}}} = \\
&\quad = R^*_{\overline{\mathrm{K}}} T^*_{e'_2} T^*_{e'_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon^{\pm}(\rho_2, \rho_1) \rho_2(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}}, \rho_1)) \varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{K}}} \rho_1, \rho_2) T_{\widehat{e}_2} T_{\widehat{e}_1}) R_{\overline{\mathrm{I}}} .
\end{aligned}$$

Vergleichen wir wieder die eingeschlossenen Zöpfe:



was (e) zeigt. Für (f) legen wir die Notation so fest:

$$e_1 = ({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{\rho_1})\,, \quad e_2 = ({}_{\mathrm{J}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\rho_2})\,, \quad e = ({}_{\mathrm{K}}{}^{\rho}{}_{\mathrm{I}}) \implies f = ({}_{\rho_1}{}^{\rho}{}_{\rho_2})\,.$$

Damit wird die linke Seite:

$$\begin{aligned}
&R^*_{\overline{\rho}_1}\, R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e_1}\rho_{\mathrm{J}}(T_{\overline{e}_1})R_{\overline{\mathrm{J}}}R^*_{\overline{\rho}_2}\, R^*_{\overline{\mathrm{J}}}\rho_{\mathrm{J}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{J}}},\rho_2)^*)T_{e_2}\rho_{\mathrm{K}}(T_{\overline{e}_2}T^*_{\overline{e}_2}T^*_{\overline{e}_1}\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(T_{\overline{f}})T_{\overline{e}})R_{\overline{\mathrm{K}}} = \\
&= R^*_{\overline{\rho}_1}\, R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*)T_{e_1}\rho_{\mathrm{J}}(T_{\overline{e}_1}\rho_{\overline{\mathrm{J}}}(R^*_{\overline{\rho}_2})T^*_{\overline{e}_1}\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1,\rho_2)^*)T_{e_2}\rho_{\mathrm{K}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(T_{\overline{f}})T_{\overline{e}})R_{\overline{\mathrm{K}}} = \\
&= R^*_{\overline{\rho}_1}\, R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*\rho_1(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\overline{\rho}_1(R^*_{\overline{\rho}_2})\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1,\rho_2)^*))T_{e_1}T_{e_2}\rho_{\mathrm{K}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(T_{\overline{f}})T_{\overline{e}})R_{\overline{\mathrm{K}}} = \\
&= R^*_{\overline{\rho}_1}\, R^*_{\overline{\rho}_2}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1)^*\rho_1(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1,\rho_2)^*))T_{e_1}T_{e_2}\rho_{\mathrm{K}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(T_{\overline{f}})T_{\overline{e}})R_{\overline{\mathrm{K}}}\,.
\end{aligned}$$

Und die rechte: Damit wird die linke Seite:

$$\begin{aligned}
&R^*_{\overline{\rho}_2}\, R^*_{\overline{\rho}_1}\rho_1(\varepsilon(\overline{\rho}_1,\rho_2)^*)T_f\rho(T_{\overline{f}})R_{\overline{\rho}}R^*_{\overline{\rho}}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho)^*)T_eT^*_e\rho_{\mathrm{I}}(T^*_f)T_{e_1}T_{e_2}\rho_{\mathrm{K}}(T_{\overline{e}})R_{\overline{\mathrm{K}}} = \\
&= R^*_{\overline{\rho}_2}\, R^*_{\overline{\rho}_1}\rho_1(\varepsilon(\overline{\rho}_1,\rho_2)^*)T_f\rho(T_{\overline{f}})R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho)^*T^*_f)T_{e_1}T_{e_2}\rho_{\mathrm{K}}(T_{\overline{e}})R_{\overline{\mathrm{K}}} = \\
&= R^*_{\overline{\rho}_1}\, R^*_{\overline{\rho}_2}R^*_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_{\mathrm{I}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}\rho_1(\varepsilon(\overline{\rho}_1,\rho_2)^*)\varepsilon(\rho_{\overline{\mathrm{I}}},\rho_1\rho_2))T_{e_1}T_{e_2}\rho_{\mathrm{K}}(\rho_{\overline{\mathrm{I}}}(T_{\overline{f}})T_{\overline{e}})R_{\overline{\mathrm{K}}}\,,
\end{aligned}$$

und der in diesem Fall besonders einfache Vergleich der Zöpfe liefert die Gleichheit der beiden Seiten. ■

§23 Konjugation im reduzierten Feldbündel

Mit den Hilfsmitteln des letzten Abschnittes können wir nun die Analoga zu den Operationen $e \mapsto e^*$, $\widehat{e}$, $\overline{e}$ auf dem reduzierten Feldbündel einführen. Als erstes induziert die *-Operation auf den Kanälen die Adjunktion der Operatoren in $\boldsymbol{\mathcal{F}}$:

Definition und Bemerkung 23.1 *Das reduzierte Feldbündel ist abgeschlossen gegenüber der antilinearen* **Operatoradjunktion***, die für* $e = ({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{\rho})$ *definiert wird durch*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} \ni \mathsf{e} = (e, A) \longmapsto \mathsf{e}^* \equiv \frac{\chi_\rho}{d_\rho} \cdot \sum_{e^*} \eta_{ee^*}(e^*, \overline{\rho}(A^*)R_\rho)\,. \tag{23.1}$$

Die Adjunktion erhält die Lokalisierung.

Beweis: die Lokalität der Adjunktion ist klar, da $\overline{\rho}$ genauso lokalisiert ist, wie ρ. Bleibt zu zeigen, daß e^* tatsächlich der zu e adjungierte Operator ist. Dazu vergleichen wir (mit $\boldsymbol{\Psi} = (\rho_{\mathrm{I}}, \Psi)$, $\boldsymbol{\Phi} = (\rho_{\mathrm{J}}, \Phi)$)

$$\begin{aligned}
(\mathsf{e}^*\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi}) &= \chi_\rho d_\rho \cdot \textstyle\sum_{e^*} \eta^*_{ee^*}\,(\,(\rho_{\mathrm{I}}, T^*_{e^*}\rho_{\mathrm{J}}\overline{\rho}(A^*)\rho_{\mathrm{J}}(R_\rho)\Psi), (\rho_{\mathrm{I}}, \Phi)\,) = \\
&= \chi_\rho d_\rho \cdot \textstyle\sum_{e^*} \eta^*_{ee^*}\langle \Psi | \rho_{\mathrm{J}}(R^*_\rho)T_{e^*}\rho_{\mathrm{I}}(A)\Phi\rangle\,,
\end{aligned}$$

mit

$$(\boldsymbol{\Psi}, \mathsf{e}\,\boldsymbol{\Phi}) = \langle \Psi | T^*_e \rho_{\mathrm{I}}(A)\Psi\rangle\,.$$

Nun gilt

$$\chi_\rho d_\rho \cdot \sum_{e^*} \eta^*_{ee^*}\rho_{\mathrm{J}}(R^*_\rho)T_{e^*}T_e = \chi_\rho d_\rho \cdot \sum_{e^*} \eta^*_{ee^*}\eta_{e^*e} = \frac{d_{\mathrm{I}}d_\rho}{d_{\mathrm{J}}} \cdot \sum_{e^*} \eta^*_{ee^*}\eta_{ee^*} = 1\,,$$

unter Verwendung von (22.3a) und (22.4a). Damit ist die Gleichheit der beiden Ausdrücke gezeigt. ■

Damit wissen wir, daß $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ eine C*-Algebra ist:

Korollar 23.2 *$\mathcal{F}$ ist eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathrm{red}})$. Die Menge der Elemente der Form (e, A) ist total in $\mathcal{F}$.*

Als nächstes führen wir die zu $e \mapsto \widehat{e}$ gehörige Operation ein:

Definition und Bemerkung 23.3 *Die lineare* **Operatorumkehr**

$$\mathcal{F} \ni \mathsf{e} = (e, A) \longmapsto \widehat{\mathsf{e}} \equiv \sqrt{\frac{d_{\mathrm{J}}}{d_{\mathrm{I}}}} \cdot \sum_{\widehat{e}} \Theta^{e}_{\widehat{e}}(\widehat{e}, A)\,, \tag{23.2}$$

*(mit $e = \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{\rho}\right)$) erhält die Lokalisierung und kommutiert mit der Adjunktion *. Sie ist bis auf eine Phase eine Involution:*

$$\widehat{\widehat{\mathsf{e}}} = \frac{\chi_{\mathrm{J}}}{\chi_{\mathrm{I}}} \cdot \mathsf{e}\,. \tag{23.3}$$

Beweis: Die Lokalität ist klar. $\widehat{\mathsf{e}^*} = (\widehat{\mathsf{e}})^*$ folgt direkt aus den Definitionen und der entsprechenden Eigenschaft der Kanäle. Zur Involutivität:

$$\widehat{\widehat{\mathsf{e}}} = \sum_{e} \Theta^{e}_{\widehat{e}} \Theta^{\widehat{e}}_{e}(e, A) = \frac{\chi_{\mathrm{J}}}{\chi_{\mathrm{I}}} \cdot \mathsf{e}\,.$$

■

Wie bei den Kanälen können wir diese Operationen kombinieren:

Definition und Bemerkung 23.4 *Die antilineare* **Ladungskonjugation**

$$\mathcal{F} \ni \mathsf{e} = (e, A) \longmapsto \overline{\mathsf{e}} \equiv (\widehat{\mathsf{e}})^* = \widehat{\mathsf{e}^*} = \sqrt{\frac{d_{\mathrm{J}}}{d_{\mathrm{I}}} \frac{\chi_\rho}{d_\rho}} \cdot \sum_{\overline{e}} \zeta_{e\overline{e}}(\overline{e}, \overline{\rho}(A^*) R_\rho)\,, \tag{23.4}$$

(mit $e = \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{\rho}\right)$) erhält die Lokalisierung. Sie ist bis auf eine Phase eine Involution:

$$\overline{\overline{\mathsf{e}}} = \frac{\chi_{\mathrm{J}}}{\chi_{\mathrm{I}}} \cdot \mathsf{e}\,. \tag{23.5}$$

Beweis: Die Identität der Definitonen folgt aus der Definition der ζ-Matrizen. Die Rechnung

$$\overline{\overline{\mathsf{e}}} = \left(\widehat{(\widehat{\mathsf{e}})^*}\right)^* = \left(\widehat{\widehat{\mathsf{e}}}\right)^{**} = \frac{\chi_{\mathrm{J}}}{\chi_{\mathrm{I}}} \cdot \mathsf{e}\,.$$

zeigt die Involutivität. ■

Bemerkung 23.5 *Die Operatoradjunktion, Operatorumkehr und Ladungskonjugation des reduzierten Feldbündels kommutieren mit der Kovarianz (21.15).*

Beweis: Die Kovarianz kommutiert mit der Operatorumkehr, da sie nur den lokalen Freiheitsgrad involviert. Das sie mit der Adjunktion kommutiert, rechnet man unter Verwendung von (14.7) nach. Das folgt dann unmittelbar auch für die Ladungskonjugation. ■

Zum ersten mal können wir nun physikalische Information in ähnlicher Form wie im Rahmen der Wightman-Theorie ableiten.

Satz 23.6 *Sei* $\mathsf{e}_1 = (e_1, A_1)$, $\ldots$, $\mathsf{e}_n = (e_n, A_n)$ *eine Kette von Feldern, die vom Vakuum ins Vakuum interpoliert, d.h.* $e_1 \circ \ldots \circ e_n \in \mathrm{Pfad}_{00}^{(n)}$. *Weiter sei* $\mathsf{e}_i \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *und die Lokalisierungsgebiete seien so angeordnet:* $\mathcal{O}_1 < \ldots < \mathcal{O}_n$. *Dann gilt*

$$\mathsf{e}_n \ldots \mathsf{e}_1 = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{\omega_{\rho_i}}} \cdot \widehat{\mathsf{e}}_1 \ldots \widehat{\mathsf{e}}_n \,, \tag{23.6}$$

mit $\rho_i = c(e_i)$. *Wird die Anordnung der Lokalisierungen umgekehrt, so wird der Faktor invertiert.*

Beweis: Der einzige Ansatz, den wir für den Austausch von Feldern haben, ist die Austauschalgebra (21.12). Wir starten deshalb von

$$\begin{aligned}(e_n, A_n) \ldots (e_1, A_1) &= \sum_{f_n \circ \ldots \circ f_1} B^{(+)}_{e_1 \circ \ldots \circ e_n, f_n \circ \ldots \circ f_1}(b_n)(f_1, A_1) \ldots (f_n, A_n) = \\ &= \sum_{f_n \circ \ldots \circ f_1} T^*_{e_n} \ldots T^*_{e_1} \varepsilon^+_{b_n}(\rho_n, \ldots, \rho_1) T_{f_n} \ldots T_{f_1}(f_1, A_1) \ldots (f_n, A_n)\,,\end{aligned} \tag{23.7}$$

mit dem in (17.3) definierten „Verdreher“. Wegen der Einschränkungen an den e-Pfad haben wir dabei

$$e_1 = ({}_0{}^{\rho_1}{}_{\rho_1})\,, \quad e_n = ({}_{\overline{\rho}_n}{}^{0}{}_{\rho_n})\,, \quad f_1 = ({}_{\overline{\rho}_1}{}^{0}{}_{\rho_1})\,, \quad f_n = ({}_0{}^{\rho_n}{}_{\rho_n})\,.$$

Daraus folgt $T_{e_1} = T_{f_n} = \mathbb{1}$, $T_{e_n} = R_{\rho_n}$ und $T_{f_1} = R_{\rho_1}$. Damit haben wir auf triviale Weise $f_n = \widehat{e}_n$ und $\Theta^{e_n}_{\widehat{e}_n} \cdot \mathbb{1} = R^*_{\rho_n} \overline{\rho}_n(\varepsilon(\iota, \rho_n)\mathbb{1}) R_{\rho_n} = \mathbb{1}$, d.h. $\Theta^{e_n}_{\widehat{e}_n} = 1$. Also ist (23.7) schon in

$$\mathsf{e}_n \ldots \mathsf{e}_1 = \sum_{f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1} T^*_{e_n} \ldots T^*_{e_1} \varepsilon^+_{b_n}(\rho_n, \ldots, \rho_1) T_{f_{n-1}} \ldots T_{f_1}(f_1, A_1) \ldots (f_{n-1}, A_{n-1})\, \widehat{\mathsf{e}}_n\,,$$

überführt. Jetzt formen wir den Intertwineranteil weiter um. Wir setzen $f_{n-1} = ({}_{\rho_n}{}^{\rho}{}_{\rho_{n-1}})$ (Quelle und Ladung liegen ja nun fest). Damit wird

$$\varepsilon^+_{b_n}(\rho_n, \ldots, \rho_1) T_{f_{n-1}} = \rho_1 \ldots \rho_{n-2}(\varepsilon(\rho_n, \rho_{n-1}) T_{f_{n-1}}) \varepsilon^+_{b_{n-1}}(\rho, \rho_{n-2}, \ldots, \rho_1)\,,$$

und weiter

$$\begin{aligned}T^*_{e_n} \ldots T^*_{e_1} \rho_1 \ldots \rho_{n-2}(\varepsilon(\rho_n, \rho_{n-1}) T_{f_{n-1}}) &= T^*_{e_n} T^*_{e_{n-1}} \sigma(\varepsilon(\rho_n, \rho_{n-1}) T_{f_{n-1}}) T^*_{e_{n-2}} \ldots T^*_{e_1} = \\ &= \sum_g T^*_{e_n} T^*_{e_{n-1}} \sigma(\varepsilon(\rho_n, \rho_{n-1}) T_{f_{n-1}}) T_g T^*_g T^*_{e_{n-2}} \ldots T^*_{e_1}\,,\end{aligned}$$

mit $\sigma = r(e_{n-2})$. Nun ist aber der Teil $T^*_{e_n} \ldots T_g$ ein Intertwiner aus $(\iota | r(g))$ und deshalb trägt nur der Term mit $g = ({}_{\sigma}{}^{0}{}_{\overline{\sigma}})$ bei. Außerdem ist $\overline{\sigma} = r(f_{n-1}) = \rho$. Daher gilt, weil wir e_n ja schon kennen, $e_{n-1} = ({}_{\overline{\rho}}{}^{\overline{\rho}_n}{}_{\rho_{n-1}})$, also $f_{n-1} = \widehat{e}_{n-1}$. Setzen wir alles zusammen, so ergibt sich

$$\mathsf{e}_n \ldots \mathsf{e}_1 =$$

$$= \sum_{f_{n-1}\circ\ \ldots\ \circ f_1} \left(R^*_{\rho_n} T^*_{e_{n-1}} \overline{\rho}(\varepsilon(\rho_n,\rho_{n-1}) T_{\widehat{e}_{n-1}}) R_\rho\right) R_\rho \cdot$$
$$T^*_{e_{n-2}} \ldots T^*_{e_1} \varepsilon^+_{b_{n-1}}(\rho,\rho_{n-2},\ \ldots,\rho_1) T_{f_{n-2}} \ldots T_{f_1} (f_1,A_1) \ldots (f_{n-1},A_{n-1})\, \widehat{\mathsf{e}}_n =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega_\rho}{\omega_{\rho_n}\omega_{\rho_{n-1}}}} \cdot \sum_{\widehat{e}_{n-1}\circ\ \ldots\ \circ f_1} \Theta^{e_{n-1}}_{\widehat{e}_{n-1}} R_\rho T^*_{e_{n-2}} \ldots T^*_{e_1} \varepsilon^+_{b_{n-1}}(\rho,\rho_{n-2},\ \ldots,\rho_1) T_{f_{n-2}} \ldots T_{f_1}$$
$$(f_1,A_1) \ldots (\widehat{\mathsf{e}}_{n-1},A_{n-1})\, \widehat{\mathsf{e}}_n =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega_\rho}{\omega_{\rho_n}\omega_{\rho_{n-1}}}} \cdot \sum_{f_{n-2}\circ\ \ldots\ \circ f_1} R_\rho T^*_{e_{n-2}} \ldots T^*_{e_1} \varepsilon^+_{b_{n-1}}(\rho,\rho_{n-2},\ \ldots,\rho_1) T_{f_{n-2}} \ldots T_{f_1}$$
$$(f_1,A_1) \ldots (\widehat{f}_{n-2},A_{n-2})\, \widehat{\mathsf{e}}_{n-1}\widehat{\mathsf{e}}_n\,,$$

denn der eingeklammerte Teil in der ersten Zeile ist bis auf die Phase genau der benötigte Θ-Faktor. Verfährt man induktiv weiter, so bekommt man als nächsten Faktor $\sqrt{\frac{\omega_{\rho'}}{\omega_\rho\omega_{\rho_{n-2}}}}$, mit $\rho' = r(f_{n-2})$ und so weiter. Schließlich finden wir (23.6). ■

Korollar 23.7 *Sei* $\mathsf{e}_1 = (e_1,A_1),\ \ldots,\ \mathsf{e}_n = (e_n,A_n)$ *eine Kette von Feldern, die vom Vakuum in einen Sektor* $[\rho]$ *interpoliert, d.h.* $e_1 \circ\ \ldots\ \circ e_n \in \mathrm{Pfad}^{(n)}_{0\rho}$. *Weiter sei* $\mathsf{e}_i \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_i)$, $i = 1,\ \ldots,\ n$ *und die Lokalisierungsgebiete seien so angeordnet:* $\mathcal{O}_1 <\ \ldots\ < \mathcal{O}_n$. *Dann gilt*

$$\overline{\mathsf{e}_n\ \ldots\ \mathsf{e}_1} = \sqrt{\prod_{i=1}^n \omega_{\rho_i}\Big/\omega_\rho} \cdot \overline{\mathsf{e}}_n\ \ldots\ \overline{\mathsf{e}}_1\,, \tag{23.8}$$

mit $\rho_i = c(e_i)$. *Wird die Anordnung der Lokalisierungen umgekehrt, so wird der Faktor invertiert.*

Beweis: Aus der Fusionsregel (21.7) des reduzierten Feldbündels wissen wir zunächst, daß $\mathsf{e}_n \ldots \mathsf{e}_1 = \mathsf{e} = (e,A)$ mit $s(e) = 0,\ r(e) = \rho$ und deshalb auch $c(e) = \rho$ ist. Wählen wir nun ein beliebiges Feld $\mathsf{g} = (e^*,B) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{O})$, mit $\mathcal{O} > \mathcal{O}_n$. Dann ist mit (23.6)

$$\frac{1}{\omega_\rho} \cdot \widehat{\mathsf{e}}\,\widehat{\mathsf{g}} = \mathsf{g}\mathsf{e} = \frac{1}{\sqrt{\omega_\rho \prod_i \omega_{\rho_i}}} \cdot \widehat{\mathsf{e}}_1\ \ldots\ \widehat{\mathsf{e}}_n\, \widehat{\mathsf{g}}\,.$$

Nimmt man davon das Adjungierte, so erhält man

$$\overline{\mathsf{g}}\,\overline{\mathsf{e}} = \sqrt{\prod_i \omega_{\rho_i}\Big/\omega_\rho} \cdot \overline{\mathsf{g}}\,\overline{\mathsf{e}}_n\ \ldots\ \overline{\mathsf{e}}_1\,. \tag{23.9}$$

Wir zeigen nun, daß $\overline{\mathsf{g}}$ invertierbar gewählt werden kann — Anwendung des Inversen auf (23.9) ergibt dann die Behauptung. Wähle $\mathsf{g} = (e^*,U)$ mit einem unitären Intertwiner von $\overline{\rho}$ nach einem in $\mathcal{O}$ lokalisierten Morphismus (um konsistent mit der Lokalisierung von g zu sein). Dann ist nach den Definitionen

$$\widehat{\overline{\mathsf{g}}\mathsf{g}} \propto (\overline{e},U)(\widehat{e},\rho(U^*)R_{\overline{\rho}}) = \sum_{f,g} F_{\widehat{e}\circ\overline{e};f;g}(g,T^*_f\rho(UU^*)R_{\overline{\rho}}) = \sum_{f,g} F_{\widehat{e}\circ\overline{e};f;g}(g,T^*_f R_{\overline{\rho}})\,,$$

mit (21.7). Nach der schon bekannten Argumentationsweise muß $T_f^* = R_{\overline{\rho}}^*$ gelten, d.h. es muß $r(f) = c(g) = 0$ sein. Damit ist

$$\widehat{\mathsf{g}}\mathsf{g} \propto \sum_g (g, \mathbb{1}) = \mathbb{1}|_{\mathcal{H}_\rho},$$

denn die Summe über $g = \left({}_{\rho}{}^{\rho}{}_{0}\right)$ ist genau die Einschränkung der Einbettung von $\mathbb{1} \in \mathfrak{A}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathrm{red}})$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)$. Wählt man die Normierung von g geeeignet und wendet $\widehat{\mathsf{g}}$ auf (23.9) an, so ergibt sich (23.8). ■

Es ist zu beachten, daß $\mathsf{e} \mapsto \overline{\mathsf{e}}$ weder ein Homomorphismus noch ein Antihomomorphismus der Algebra $\mathcal{F}$ ist. Ersteres wegen obigem Korollar, letzteres, weil zudem die $\widehat{\ }$-Operation nicht mit der Fusionsalgebra (21.7) verträglich ist. Man findet aber eine schwächere Eigenschaft:

Satz 23.8 *Seien* $\mathsf{e}_1 = (e_1, A_1)$, $\mathsf{e}_2 = (e_2, A_2)$ *zwei Felder mit* $s(e_1) = 0$, $r(e_2) = \rho$, $c(e_i) = \rho_i$. *dann gilt*

$$\overline{\mathsf{e}_2\,\mathsf{e}_1} = \frac{\omega_{\rho_1}\omega_{\rho_2}}{\omega_\rho} \cdot \sum_{f_2 \circ f_1} B^{(+)}_{f_2\circ f_1, e_1\circ e_2} \overline{\mathsf{f}_1}\,\overline{\mathsf{f}_2}, \tag{23.10}$$

mit $\mathsf{f}_i = (f_i, A_i)$.

Beweis: Mit Hilfe von (21.7) finden wir für die linke Seite von (23.10):

$$\begin{aligned}\overline{\mathsf{e}_2\,\mathsf{e}_1} &= \overline{\sum_{e,f} F_{e_1\circ e_2;f;e}(e, T_f^*\rho_1(A_2)A_1)} = \\ &= \sum_{e,f} (F_{e_1\circ e_2;f;e})^* \frac{\sqrt{d_\rho}}{\chi_\rho} \cdot \zeta_{e\overline{e}}(\overline{e}, \overline{\rho}(A_1^*\rho_1(A_2^*))\overline{\rho}(T_{e_2})R_\rho) = \\ &= \frac{\sqrt{d_\rho}}{\chi_\rho} \cdot (\overline{e}, \overline{\rho}(A_1^*\rho_1(A_2^*))\overline{\rho}(T_{e_2})R_\rho),\end{aligned}$$

denn mit obigen Setzungen gilt

$$e_1 = \left({}_{0}{}^{\rho_1}{}_{\rho_1}\right), \quad f = e_2 = \left({}_{\rho_1}{}^{\rho}{}_{\rho_2}\right), \quad e = \left({}_{0}{}^{\rho}{}_{\rho}\right),$$

und somit ist $T_e = T_{e_1} = \mathbb{1}$, $\zeta_{e\overline{e}} = 1$, die Fusionsmatrix trivial und alle Summen brechen zusammen. Die rechte Seite können wir unter Verwendung von (19.11) schreiben als

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_\rho}{\omega_{\rho_1}\omega_{\rho_2}} \cdot \sum_{f_2\circ f_1} B^{(-)}_{f_2\circ f_1, e_1\circ e_2} \overline{\mathsf{f}_1}\,\overline{\mathsf{f}_2} = \\ &= \frac{\omega_\rho}{\omega_{\rho_1}\omega_{\rho_2}} \frac{d_{\rho_1}d_{\rho_2}}{\chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}\sqrt{d_\rho}} \cdot \sum_{f_2\circ f_1} B^{(-)}_{f_2\circ f_1, e_1\circ e_2} \zeta_{f_1\overline{f}_1}(\overline{f}_1, \overline{\rho}_1(A_1^*)R_{\rho_1})(\overline{f}_2, \overline{\rho}_2(A_2^*)R_{\rho_2}),\end{aligned} \tag{23.11}$$

Denn es gilt $f_1 = \left({}_{\rho_2}{}^{\rho}{}_{\rho_1}\right)$, $f_2 = \left({}_{0}{}^{\rho_2}{}_{\rho_2}\right)$ und deshalb ist insbesondere $\zeta_{f_2\overline{f}_2} = 1$. Entwickeln wir wieder das Operatorprodukt:

$$\begin{aligned}(\overline{f}_1, \overline{\rho}_1(A_1^*)R_{\rho_1})(\overline{f}_2, \overline{\rho}_2(A_2^*)R_{\rho_2}) &= \sum_{\overline{e},\overline{f}} F_{\overline{f}_2\circ\overline{f}_1;\overline{f};\overline{e}}(\overline{e}, T_{\overline{f}}^*\overline{\rho}_2(\overline{\rho}_1(A_1^*)R_{\rho_1})\overline{\rho}_2(A_2^*)R_{\rho_2}) = \\ &= (\overline{e}, \overline{\rho}(A_1^*\rho_1(A_2^*))T_{\overline{f}_1}^*\overline{\rho}_2(R_{\rho_1})R_{\rho_2}),\end{aligned}$$

denn auch diese Fusionsmatrix ist trivial, da $e = \left({}_{0}{}^{\rho}{}_{\rho}\right)$ und $f = f_1$ ist. Betrachten wir nun den Teil $T_{\overline{f}_1}^*\overline{\rho}_2(R_{\rho_1})R_{\rho_2}$ des Observablenanteils und nennen ihn X, so stellen wir fest, daß

$X \in (\overline{\rho}\rho_2\rho_1|\iota)$ gilt. Diesen Intertwinerraum können wir als Hilbertraum aufspannen durch die Basis $X_f \equiv \overline{\rho}(\varepsilon(\rho_2\rho_1)T_f)R_\rho$ und in dieser Basis schreibt sich X als

$$X = \sum_g (X_g^* X) X_g = \underbrace{R_\rho^* \overline{\rho}(T_g^* \varepsilon(\rho_2, \rho_1)^*) T_{\overline{f_1}}^* \overline{\rho}_2(R_{\rho_1}) R_{\rho_2}}_{*} \, X_g \, .$$

Betrachte nun

$$\zeta_{\overline{f}_1 g}^* = \sqrt{\frac{\omega_\rho}{\omega_{\rho_1}\omega_{\rho_2}}} \cdot R_\rho^* \overline{\rho}(T_g^*) T_{\overline{f}_1}^* \overline{\rho}_2(\varepsilon(\rho_2, \overline{\rho}_1)) R_{\rho_2} R_{\rho_1} \, .$$

Dann sieht man (am besten graphisch):

$$* = \sqrt{\frac{\omega_{\rho_1}\omega_{\rho_2}}{\omega_\rho}} \cdot \zeta_{\overline{f}_1 g}^* = \sqrt{\frac{\omega_{\rho_1}\omega_{\rho_2}}{\omega_\rho}} \frac{\chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}}{\chi_\rho} \cdot \zeta_{f_1 \overline{g}}^* \, , \cdot$$

mit (22.4c). Setzt man alles in unsere Form (23.11) der rechten Seite ein, so erhält man

$$\sum_{f_2 \circ f_1} \frac{\sqrt{d_\rho}}{\chi_\rho} \cdot (\overline{e}, \overline{\rho}(A_1^* \rho_1(A_2^*)) \overline{\rho}(B^{(-)}_{f_2 \circ f_1, e_1 \circ e_2} \varepsilon(\rho_2, \rho_1) T_{f_1}) R_\rho) = \frac{\sqrt{d_\rho}}{\chi_\rho} \cdot (\overline{e}, \overline{\rho}(A_1^* \rho_1(A_2^*)) \overline{\rho}(T_{e_2}) R_\rho) \, ,$$

mit (22.3c), womit letztlich die Gleichheit von rechter und linker Seite gezeigt ist. ■

KAPITEL IV

Konforme Theorien

Überblick

Dieses Kapitel ist der Untersuschung eines besonders fruchtbaren Modellfalles einer algebraischen QFT gewidmet: der konform kovarianten AQFT auf dem kompaktifizierten Lichtkegel S^1. Aus der Kompaktheit der Raumzeit ergeben sich hierbei etliche interessante Besonderheiten.

In §24 erklären wir zunächst, was konforme Kovarianz auf dem Einheitskreis bedeutet und führen den Begriff einer konformen QFT (CQFT) im Wightmann-Sinne im Gegensatz zu dem einer *algebraischen* konformen QFT (ACQFT) ein. In §25 wird dann am Beispiel CQFT/ACQFT skizziert, wie man prinzipiell von einer Wightman- zu einer algebraischen QFT gelangt und welche Schwierigkeiten (Lokalität etc.) dabei zu erwarten sind. Den umgekehrten Weg, d.h. die Rekonstruktion einer CQFT aus einer ACQFT beschreiten wir hier nicht. Das hat M. Jörß in [Jör92] getan. Weiter zitieren wir das CPT-Theorem für ACQFT's. Dieses schon aus der Wightman-Theorie wohlbekannte Theorem verknüpft im algebraischen Rahmen Symmetrien der Raumzeit, nämlich die Raum-Zeit-Reflektion, mit den modularen Strukturen der lokalen von Neumann Algebren. Dies wurde für den vierdimensionalen Minkowskiraum in dieser Form zuerst von Bisognano und Wichmann ([BW75], [BW76]) untersucht. Da die Raum-Zeit-Reflektion, die in der CPT-Transformation auftritt, immer von einem Lokalisierungsgebiet in dessen kausales Komplement führt (und entsprechend für die lokalen Algebren) und andererseits die involvierte modulare Konjugation eine Algebra in ihren Kommutanten überführt, ergibt sich in natürlicher Weise mithilfe der CPT-Symmetrie die für die algebraische Theorie so entscheidende Eigenschaft der Haag-Dualität. Die beiden Abschnitte §24 und §25 basieren auf folgenden Originalarbeiten: In [FST89] werden die Grundlagen konformer Kovarianz und die Kompaktifizierung des Lichtkegels eklärt. Den Rahmen für eine algebraische konforme Theorie legen [BMT88] und [BSM90]. In letzterer Arbeit finden sich auch CPT-Theorem und Haag-Dualität für ACQFT's

Wenn man eine AQFT auf einer kompakten Raumzeit wie in den ersten drei Kapiteln aufbauen will, so steht man vor einem besonderen Problem: Eine quasilokale Observablenalgebra läßt sich nicht mehr als induktiver Limes der lokalen bilden, da das lokale Netz nicht mehr gerichtet ist. Dieses Problem wurde erst vor kurzer Zeit mit garbentheoretischen Mitteln gelöst (im Ansatz in [FRS92], ausgeführt in [GL92]). Wir gewinnen so in §26 eine im wesentlichen eindeutig bestimmte *universelle Algebra*, die alle Eigenschaften einer quasilokalen besitzt. Am Rande sei nur erwähnt, daß damit im Prinzip auch das entsprechende Problem in $2+1$ Dimensionen bei Lokalisierung der Ladungen in raumartigen Kegeln gelöst ist (vgl. [FG90], [FRS92]). In §27 formulieren wir damit dann die der DHR-Theorie entsprechende Theorie konform kovarianter, lokalisierter Endomorphismen der universellen Algebra $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$.

In §28, §29 und §30 werden die speziellen Eigenschaften einer DHR-Theorie auf einer kompakten Raumzeit im einzelnen untersucht. Wir konstruieren in §28 explizit *globale* Operatoren in $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$, also solche, die in keiner lokalen Observablenalgebra liegen. Nach einem Exkurs, in dem in §29 das konforme Äquivalent des Spin-Statistik-Theorems abgeleitet wird, zeigen wir in §30, daß die globalen Operatoren die sogenannte *Verlinde-Algebra* erfüllen. Diese Verallgemeinerung der Charakterenalgebra einer endlichen Gruppe fand man zuerst in konformen Feldtheorien als Algebra der modularen Transformationen (vgl. [MS89c], [Li91]). Sie wird hier aber ohne jeden konformen Input abgeleitet — ihr Auftreten ist offenbar ein Merkmal der Quantensymmetrie, die der Theorie auf einer kompakten Raumzeit zugrundeliegt.

In §31 führen wir schließlich das universelle reduzierte Feldbündel auf der S^1 ein. Auch hier ergibt sich eine Besonderheit aufgrund der kompakten Raumzeit: Es zeigt sich, daß die Felder von $\mathcal{F}_{\mathrm{univ}}$ in der universellen Überlagerung $\mathbb{R}$ des Einheitskreises lokalisiert werden müssen, um volle Möbiuskovarianz zu ermöglichen. Die Gruppe, die dann die Vertauschung dieser Felder beschreibt, ist die Zopfgruppe auf dem Zylinder.

Zuletzt behandeln wir in §32 ein recht neues Thema: Die Rekonstruktion der Raum-Zeit-Symmetrie, ja der Raumzeit selbst aus wenigen von Neumann Algebren und ihrer Tomita-Takesaki-Theorie. Bei Vorgabe von nur zwei geschickt gewählten von Neumann Algebren konnte Hans-Werner Wiesbrock aufbauend auf der wesentlichen Vorarbeit von H. J. Borchers ([Bor92]) eine ACQFT auf der S^1 modellieren.

§24 Konforme Theorien auf dem kompaktifizierten Lichtkegel

Die Gruppe der globalen konformen Transformationen in zwei Dimensionen ist nichts anderes als die wohlvertraute Lorentzgruppe $SO(3,1)$. Die konforme Symmetrie kann realisiert werden durch rationale Transformationen der (durch Hinzufügung einens unendlich fernen Punktes kompaktifizierten) komplexen Ebene $\overline{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — sogenannte **Möbius-Transformationen**:

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;:\; \mathbb{C} \ni \zeta \longmapsto \gamma(\zeta) \equiv \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \quad \text{für} \quad \gamma \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 . \tag{24.1}$$

Darin drückt sich die Isomorphie von Lorentzgruppe $\mathrm{SO}(3,1)$ und **Möbiusgruppe** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ aus. Führt man die Lichtkegelkoordinaten

$$\zeta_+ \equiv x^0 + x^1 , \quad \zeta_- \equiv x^0 - x^1 , \quad (\text{für} \quad \zeta = x^0 + ix^1) , \tag{24.2}$$

ein, so zeigt sich ([FST89], [BMT88]), daß die Wirkung der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ auf $\overline{\mathbb{C}}$ faktorisiert in das direkte Produkt

$$(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2) \times (\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2) , \tag{24.3}$$

wobei die Faktoren auf jeweils einer der Lichtkegelkoordinaten operieren. Diese Darstellung läßt sich aber nur realisieren, wenn man die Lichtkegel $\mathbb{R}$ zum Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ kompaktifiziert, denn nur dort sind *gebrochen* rationale Transformationen (wie z.B. $z \mapsto 1/z$) wohldefiniert. Die Kompaktifizierung geschieht üblicherweise mittels einer **Cayley-Transformation** der Form

$$\zeta_\pm \longmapsto z \equiv \frac{1 + (i/2)\zeta_\pm}{1 - (i/2)\zeta_\pm} ,$$

wodurch der Punkt $\zeta_\pm = 0$ auf $+1$ und $\pm\infty$ auf -1 abgebildet wird. Unter dieser Transformation werden die Abbildungen (24.1) zu Operationen aus der $\mathrm{SU}(1,1)$, die auf der S^1 wiederum durch gebrochen rationale Transformationen wirkt:

$$\lambda \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \; S^1 \ni z \longmapsto \lambda(z) \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathrm{SU}(1,1) . \tag{24.4}$$

$\lambda \in \mathrm{SU}(1,1)$ ist dabei eindeutig mit einer Matrix γ aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ verknüpft, durch den Isomorphismus

$$\begin{gathered} 2\alpha = a + d + i\left(\frac{b}{2} - 2c\right), \quad 2\beta = d - a + i\left(\frac{b}{2} + 2c\right), \\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 = ad - bc , \end{gathered} \tag{24.5}$$

(vgl. [FST89], §3.2). Wenn wir in Zukunft von der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ sprechen, so meinen wir damit immer ihr Bild unter der Cayley-Transformation. Dieses Bild wird erzeugt von drei Ein-Parameter-Untergruppen. Dies sind die **Rotationen**

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{24.6}$$

die **Dilatationen**

$$\delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{24.7}$$

und schließlich die **Translationen**

$$\tau(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 + i\sigma & i\sigma \\ -i\sigma & 1 - i\sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbb{R} . \tag{24.8}$$

Einige geometrische Eigenschaften dieser Operationen:

Bemerkung 24.1 *Die Dilatationen $\delta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ lassen den oberen und den unteren Halbkreis $\{z \in S^1 \,|\, \pm\Im(z) > 0\}$ invariant. Die Translationen $\tau(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ lassen das Bild des unendlich fernen Punktes -1 invariant. Auf der Menge der offenen, eigentlichen Intervalle $\{\mathcal{I} = (z_1, z_2) \subset S^1, | \, z_1 \neq z_2 \in S^1\}$ wirkt das Bild der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ transitiv.*

Beweis: Die ersten beiden Aussagen sind unmittelbar nachzurechnen. Weiter kann man schon durch Dilatationen und Rotationen jedes beliebige Intervall in jedes andere überführen. ■

Der natürliche Lebensbereich konformer Quantenfeldtheorien ist also der Torus $S^1 \times S^1$. Wir führen nun den einfachsten Begriff einer *konformen Quantenfeldtheorie auf dem Einheitskreis* ein:

Definition 24.2 *Eine* **konforme Quantenfeldtheorie (CQFT) auf dem Einheitskreis** S^1 *ist definiert durch einen Vakuumhilbertraum $\mathfrak{H}$, der eine stark stetige unitäre Darstellung W der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ trägt. Es existiere ein bis auf eine Phase eindeutig bestimmter Einheitsvektor $\Omega \in \mathfrak{H}$ (Vakuumvektor), der invariant ist unter $W(\gamma)$, $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Wir schreiben*

$$U(t) \equiv W(\rho(t)), \quad V(\lambda) \equiv W(\delta(\lambda)), \quad t, \lambda \in \mathbb{R} . \tag{24.9}$$

Der Generator von U heißt der **konforme Hamiltonian** *und wird mit T_0 bezeichnet. Das Spektrum von T_0 sei $\mathbb{R}^+$. Weiterhin sei eine Familie von operatorwertigen Distributionen* **(konforme Felder)**

$$\phi: \ S^1 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D}), \tag{24.10}$$

*gegeben, wobei $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ eine *-Algebra (unbeschränkter) linearer Operatoren mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathfrak{H}$ ist. Diese Distributionen sollen die üblichen Wightman-Axiome der Hermitizität, Kovarianz und Kausalität erfüllen (siehe z.B. [Haa92], Seiten 58–60).*

Diese grobe Definition einer Wightman-QFT reicht für unsere Zwecke aus, da es uns nur um grundlegende Strukturen geht. Als Kandidaten für die „konformen Felder“ seien die *Energiedichte* $T(z)$ und *konforme Ströme* $J(z)$ genannt (vgl. [BMT88]).

Im Gegensatz zu obiger Definition steht der Begriff einer im Sinne des ersten Kapitels *algebraischen* konformen Quantenfeldtheorie auf dem Einheitskreis:

Definition 24.3 *Gegeben sei ein lokales Netz $\mathfrak{A}$ von von Neumann Algebren auf den offenen eigentlichen Intervallen $\mathcal{I} \subset S^1$, $S^1 \backslash \mathcal{I}$ offen, so daß die Axiome I und II aus §1 erfüllt sind, d.h. es gilt Isotonie auf Intervallen:*

$$\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \Longrightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{I}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{I}_2). \tag{24.11}$$

Weiter sei für die **Intervallalgebren** *$\mathfrak{A}(\mathcal{I})$ Axiom III erfüllt, d.h. es existiere für alle $\mathfrak{A}(\mathcal{I})$ eine gemeinsame treue Vakuumdarstellung π_0 auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}_0$ mit eindeutig bestimmtem zyklischem und separierendem Vakuumevektor Ω. Die Intervallalgebren erfüllen Lokalität (Axiom VII):*

$$\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2' \Longrightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{I}_1) \subset \mathfrak{A}(I_2)', \tag{24.12}$$

wobei das raumartige Komplement eines Intervalls $\mathcal{I}'$ gegeben ist durch $S^1 \backslash \overline{\mathcal{I}}$ (d.h. durch das offene Innere des gewöhnlichen Komplements). Die lokalen Algebren mögen weiter die Haag-Dualität (Axiom IX) in der Vakuumdarstellung erfüllen:

$$\pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{I}'))' = \pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{I})), \tag{24.13}$$

für alle eigentlichen Intervalle $\mathcal{I} \subset S^1$. Eine solche algebraische Quantenfeldtheorie auf den eigentlichen Intervallen der S^1 heißt **konforme algebraische Quantenfeldtheorie (ACQFT)** *wenn zusätzlich eine stark stetige unitäre Darstellung W der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ auf $\mathfrak{H}_0$ gegeben ist, die den Vakuumvektor invariant läßt und für die der Generator der Rotationen $U(t)$ positives Spektrum hat, so, daß die Kovarianzbedingung*

$$W(g)\pi_0(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))W(g)^{-1} = \pi_0(\mathfrak{A}(g\mathcal{I})), \quad \forall g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2, \tag{24.14}$$

für die Intervallalgebren erfüllt ist ($g\mathcal{I}$ bezeichnet das mit durch g transformierte Intervall).

Ein wesentlicher Unterschied zur vierdimensionalen algebraischen QFT ist, daß auf der S^1 das lokale Netz nicht gerichtet ist: Eine endliche Menge von eigentlichen Intervallen kann bereits den ganzen Einheitskreis überdecken und also kein Supremum in den eigentlichen Intervallen besitzen. Dies macht es unmöglich, eine globale Observablenalgebra als induktiven Limes der lokalen zu definieren. Uns steht somit zunächst keine globale Observablenalgebra zur Verfügung und deshalb konnte auch die Kovarianzbedingung nicht unter Verwendung von Automorphismen formuliert werden. Auch die üblichen Ansätze der DHR-Theorie, die ja auf der Existenz von lokalisierten Endomorphismen der globalen Algebra und von lokalen Ladungstransportern aufbauen, kann man zunächst nicht verwenden.

Dementsprechend können wir auch die für uns interessanten Darstellungen des lokalen Netzes $\mathfrak{A}$ nur auf den Intervallalgebren beschreiben. Wir definieren:

Definition 24.4 *Eine* **konform kovariante Darstellung positiver Energie** *eines lokalen Netzes* $\mathfrak{A}$ *einer ACQFT auf der* S^1 *ist eine Familie von Darstellungen* $\pi^{\mathcal{I}}$ *von* $\mathfrak{A}(\mathcal{I})$ *auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$ *, zusammen mit einer stark stetigen unitären Darstellung* W_π *der universellen Überlagerung der* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ *, so daß die Kompatibilitätsbedingung*

$$\pi^{\mathcal{J}}|_{\mathfrak{A}(\mathcal{I})} = \pi^{\mathcal{I}}\,, \tag{24.15}$$

für alle eigentlichen Intervalle $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ *und die Kovarianzbedingung*

$$W_\pi(\tilde{g})\pi^{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))W_\pi(\tilde{g})^{-1} = \pi^{g\mathcal{I}}(W(g)\mathfrak{A}(\mathcal{I})W(g)^{-1}) = \pi^{g\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(g\mathcal{I}))\,, \tag{24.16}$$

für alle $\tilde{g}$ *in der universellen Überlagerung der* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ *und alle eigentlichen Intervalle* $\mathcal{I}$ *gilt (*$\tilde{g} \mapsto g$ *ist der Überlagerungshomomorphismus). Der konforme Hamiltonian in der Darstellung* π*, d.h. der Generator* $T_0^{(\pi)}$ *von* $U_\pi(t) \equiv W_\pi(\widetilde{\rho(t)})$ *habe positives Spektrum.*

Der Kürze halber bezeichnen wir von nun an Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ mit M , ihre universelle Überlagerung mit $\widetilde{\mathrm{M}}$.

In §26 werden wir eine Möglichkeit finden, auf kanonische Weise eine „globale" Algebra zu definieren, in die alle Intervallalgebren treu eingebettet sind. Das wird aber nur um den Preis zu machen sein, daß die Vakuumdarstellung nicht mehr treu ist. Dennoch bietet diese recht neue Formulierung alle Vorteile der DHR-Theorie.

§25 Lokales Netz, Haag-Dualität und CPT-Theorem auf der S^1

Das erste, was man tun kann, um von einer CQFT nach Def.24.2 zu einer ACQFT auf der S^1 zu gelangen, ist, Wightman-Felder mit Testfunktionen zu verschmieren, wodurch aus den operatorwertigen Distributionen Operatoren auf demselben Definitionsbereich $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ werden, d.h. wir stellen die Distributionen formal dar durch:

$$\phi(f) \equiv \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i z}\, f(z)\phi(z)\,, \quad f \in C^\infty(S^1)\,, \tag{25.1}$$

(wir nehmen an, die glatten Funktionen des Einheitskreises seien unser Testfunktionenraum). Die so erhaltenen Operatoren sind abschließbar und wir bezeichnen ihren Abschluß jeweils mit demselben Symbol. $\phi(f)$ und sein Adjungiertes $\phi(f)^*$ sind dann auf $\mathcal{D}$ definiert. Die Wightman-Axiome schreiben sich damit so:

Bemerkung 25.1 *Es gilt*

$$\phi(z) = \phi(z)^*\,, \tag{25.2i}$$

$$W(\gamma)\phi(z)W(\gamma)^{-1} = D_s(z;\gamma)\cdot\phi(\gamma(z))\,, \tag{25.2ii}$$

wobei $s \in \mathbb{N}$ *der Spin von* ϕ *und* $D_s(z;\gamma) = |\alpha z + \beta|^{-2s}$ *mit* γ *wie in (24.4). Und*

$$[\phi(z), \phi(z')] = 0\,, \quad \textit{für } z \neq z'\,. \tag{25.2iii}$$

Diese zunächst nur formalen Gleichungen können leicht exakt gemacht werden, wenn man (25.1) benutzt — wir sparen uns daher einen Beweis.

Die Fourierkomponenten von Feldern und Testfunktionen sind dann gegeben durch

$$\phi_n \equiv \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i z}\, z^n\cdot\phi(z)\,, \quad f_n \equiv \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i z}\, z^n\cdot f(z)\,, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{25.3}$$

Die Hermitizitätsbedingung (25.2i) schreibt sich dann als

$$\phi_n^* = \phi_{-n}\,, \tag{25.4}$$

und die Operatoren $\phi(f)$ werden dargestellt durch

$$\phi(f) = \sum_n f_{-n} \cdot \phi_n = \sum_n f_n \cdot \phi_{-n}\,, \tag{25.5}$$

(die Summe konvergiert absolut in Anwendung auf jeden Vektor in dem Unterraum $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, der aus dem Vakuum von allen $\phi(f),\ \phi(f)^*$ erzeugt wird).

Die lokalen von Neumann Algebren einzuführen ist nun standard: wir ordnen dem eigentlichen Intervall $\mathcal{I}$ die Algebra

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}) \equiv \{\phi(f),\ \phi(f)^* \,|\, f \text{ reell},\ \operatorname{supp} f \subset \mathcal{I}\}''\,, \tag{25.6}$$

zu. Isotonie und Kovarianz folgen unmittelbar:

Bemerkung 25.2 *Die durch (25.6) gegebenen Algebren erfüllen*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{I}_2) \quad \textit{für } \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2\,, \tag{25.7}$$

und

$$W(g)\mathfrak{A}(\mathcal{I})W(g)^{-1} = \mathfrak{A}(g\mathcal{I})\,, \quad \forall g \in \mathrm{M}\,. \tag{25.8}$$

Außerdem die Vakuumdarstellung π_0 auf ganz $\mathfrak{H}$ durch den schwachen Abschluß der Algebren durch die definierende Darstellung gegeben.

Die konforme Kovarianz erzeugt einige Eigentümlichkeiten der algebraischen Theorie, zum Beispiel

Bemerkung 25.3 *Die Intervallalgebren sind invariant gegenüber dem Abschluß des zugrundeliegenden Intervalls:*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}) = \mathfrak{A}(\overline{\mathcal{I}})\,. \tag{25.9}$$

Beweis: Wähle eine Folge $\mathrm{M} \supset \{g_n\} \longrightarrow e$, so daß $g_n\overline{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$. Wegen der Kovarianz ist dann[1)]

$$W(g_n)\mathfrak{A}(\overline{\mathcal{I}})W(g_n)^{-1} = \mathfrak{A}(g_n\overline{\mathcal{I}}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{I})\,,$$

dank Isotonie. Nun ist die Darstellung W stark stetig, d.h. $W(g_n)$ geht stark gegen $\mathbb{1}$ und $\mathfrak{A}(\mathcal{I})$ ist schwach abgeschlossen, deshalb ist der Granzwert

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}(g_n\overline{\mathcal{I}}) = \mathfrak{A}(\overline{\mathcal{I}})\,,$$

eine Untermenge von $\mathfrak{A}(\mathcal{I})$. Die umgekehrte Inklusion gilt trivial und somit folgt die Behauptung. ■

[1)] In diesem und den folgenden Beweisen dieses Abschnitts unterdrücken wir wieder die Vakuumdarstellung auf den lokalen Algebren, wo sie als definierende Darstellung natürlich treu ist. *Global* ist dies aber nicht möglich, wie wir in den nächsten Abschnitten sehen werden.

Dies ist — geometrisch gesprochen — ein Ausdruck davon, daß es für die *lokale* Physik unerheblich ist, ob man den raumartig unendlich fernen Punkt, der den konformen Lichtkegel zur S^1 kompaktifiziert, wegläßt oder nicht.

Eines der eigentlichen Probleme beim Übergang von einer Wightman-QFT zu einer algebraischen QFT ist, daß nach dem Muster von (25.6) definierte Observablenalgebren nicht mehr notwendig die Forderung nach Lokalität erfüllen. Das liegt am von Neumann-Abschluß und dem erweiterten Definitionsbereich. Dieses und andere wesentliche Probleme zu beseitigen ist im allgemeinen nicht einfach — siehe hierzu [DSW86] und den ausführlichen Überblick in [BJY92].

Im Fall von konformen Theorien vereinfacht sich die Situation aber erheblich, denn für den konformen Energie-Impulstensor $T(z)$ und für konforme Ströme $J(z)$ garantiert die Virasoro-Algebra, die ihre Fourierkomponenten erfüllen, daß die hinreichenden Bedingungen, aus denen sich Lokalität folgern läßt, gegeben sind.

Satz 25.4 *Die vom konformen Energie-Impulstensor $T(z)$ oder von konformen Strömen $J(z)$ (vgl. hierzu [FST89]) auf dem Einheitskreis durch (25.6) gegebenen Intervallalgebren erfüllen Lokalität:*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{I}')' . \tag{25.10}$$

Beweis: Die Fourierkomponenten der Energiedichte erfüllen nach dem *Lüscher-Mack-Theorem* die *Virasoro-Algebra*

$$[T_n, T_m] = (n-m)T_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0} , \tag{25.11}$$

(vgl. [FST89]), mit der *zentralen Ladung* $c > 0$. Wir zeigen nun, daß die T_n sogenannte *lineare Energieschranken* erfüllen, wonach wir ein Ergebnis aus [DSW86] anwenden können, das Lokalität der zugrundeliegenden Felder garantiert. Dazu brauchen wir Schranken für die Normen $\|T_n \Psi_N\|$, wobei Ψ_N ein beliebiger normierter Eigenvektor von T_0 zum Eigenwert $N \in \mathbb{N}_0$ ist (man beachte, daß alle solchen Ψ_N Elemente des Definitionsbereiches $\mathcal{D}_0$ sind). Nehmen wir zunächst $n \geq 1$ an. Dann ist $T_n \Psi_N$ entweder ein Eigenvektor von T_0 zum Eigenwert $N - n \geq 0$ oder null. Im ersteren Fall erhalten wir

$$\|T_n\Psi_N\|^4 \leq \langle T_n\Psi_N, T_n T_n^* T_n \Psi_N\rangle = \left\{2n(N-n) + \frac{c}{12}n(n^2-1) + \|T_n\Psi_{N-n}\|^2\right\} \cdot \|T_n\Psi_N\|^2 , \tag{25.12}$$

wenn wir beachten, daß Ψ_N normiert ist, unter Verwendung der Hermitizitätsbedingung (25.4) und (25.11). Nach Division von $\|T_n\Psi_N\|^2$ sieht man durch Induktion in n, daß

$$\|T_n\Psi_N\|^2 \leq N^2 + \frac{c}{12}(n^2-1) \cdot N .$$

Für $N \leq -1$ gewinnen wir daraus mit (25.11)

$$\|T_n\Psi_N\|^2 = \|T_{-n}\Psi_N\|^2 - 2nN - \frac{c}{12}n(n^2-1) .$$

Dies führt zusammen mit der letzten Beschränkung auf die Abshcätzung für beliebige $n \in \mathbb{Z}$:

$$\|T_n\Psi_N\|^2 \leq N + \frac{c}{24}n^2 + |n| = \left\|(T_0 + \frac{c}{24}n^2 + |n|)\Psi_N\right\| . \tag{25.13}$$

Für einen beliebigen Vektor $\Psi \in \mathcal{D}_0$ folgt nun, da Ψ als konvergente Summe $\Psi = \sum_N C_n \Psi_N$ dargestellt werden kann und da die Vektoren $T_n \Psi_N$ für festes n orthogonal sind für verschiedene N, die gleiche Abschätzung für Ψ:

$$\|T_n \Psi\|^2 \leq \left\|(T_0 + \frac{c}{24}n^2 + |n|)\Psi\right\| .$$

Unter Verwendung der Darstellung (25.5) und der Tatsache, daß die Fourierkomponenten f_n von Testfunktionen für große n schneller als jede Potenz abnehmen, schließen wir, daß für jedes $f \in C^\infty(S^1)$ eine Konstante c_f existiert, so daß

$$\|T(f)\Psi\| \leq c_f \cdot \|(T_0 + 1)\Psi\| , \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}_0 , \tag{25.14}$$

und das ist genau, was man eine linare Energieschranke nennt. Im Falle konformer Ströme $J(z)$ erhält man aus einer Variante des Lüscher-Mack-Theorems die Vertauschungsrelationen

$$[J_n, J_m] = \frac{K}{2} \cdot n\delta_{n+m,0} , \tag{25.15}$$

mit $K > 0$. Damit findet man durch ein einfacheres Argument als oben die analoge Abschätzung

$$\|J(f)\Psi\| \leq c_f \cdot \|(T_0 + 1)\Psi\| , \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}_0 , \; f \in C^\infty(S^1) . \tag{25.16}$$

Damit können wir die Ergebnisse aus [DSW86], insbesondere Theorem 5.5 anwenden, daß uns in diesem Fall sagt, daß die Polynomialalgebren von $T(f)$, $J(g)$, $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset \mathcal{I} \subset S^1$ lokal sind im Sinne von (25.10). ■

Bevor wir weitergehen, benötigen wir als techniches Hilfsmittel noch das *Reeh-Schlieder-Theorem* für CQFT's, das im Allgemeinen für Wightman-QFT's gilt und das wir schon in Theorem 3.5 als Folgerung aus den Standardaxiomen der AQFT kennengelernt hatten.

Theorem 25.5 *Der Vakuumvektor Ω von $\mathfrak{H}$ ist zyklisch und separierend für jede der lokalen Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{I})$ (vgl. Def.A.19).*

Zum Beweis siehe z.B. [Haa92], Seite 101. Damit sind wir nun nahe daran, das CPT-Theorem, eines der besonders wesentlichen Ergebnisse der axiomatischen QFT, formulieren zu können. Denn da das Vakuum zyklisch und separierend für die lokalen Algebren ist, können wir auf diese die Tomita-Takesaki-Theorie modularer Konjugationen anwenden. Und zwar betrachten wir insbesondere die Intervallalgebren

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}_+) , \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}(\mathcal{I}_-) , \quad \mathcal{I}_\pm \equiv \left\{ z \in S^1 \,|\, \pm \Im z > 0 \right\} ,$$

des oberen und unteren Halbkreises. Für $\mathfrak{A}(\mathcal{I}_\pm)$ ist der Vakuumvektor $\Omega \in \mathfrak{H}$ zyklisch und separierend, das heißt die antilinearen Operatoren $S_{0\pm}$, die definiert sind durch

$$S_{0\pm} A\Omega = A^*\Omega , \quad \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{I}_\pm) ,$$

sind dicht definiert und abschließbar; ihre Abschlüsse bezeichnen wir wieder mit $S_\pm$ (vgl. Def.A.21). Das *CPT-Theorem* der ACQFT verknüpft nun die modularen Strukturen dieser Intervallalgebren mit der CPT-Operation der zugrundeliegenden Wightman-Felder.

Theorem 25.6 (CPT-Theorem) *Durch die Setzung*

$$\Theta\Omega \equiv \Omega\,, \quad \textit{und} \quad \Theta\phi(z)\Theta^{-1} \equiv (-1)^s \phi(1/z)^*\,, \tag{25.17}$$

ist ein antiunitärer Operator auf $\mathfrak{H}$ definiert. $S_\pm$ besitzt die polare Zerlegung

$$S_\pm = \Theta \cdot V(\mp i\pi/2)\,, \tag{25.18}$$

wobei V der Dilatationsoperator aus Def.24.2 ist.

Dieses Theorem wird im konformen Fall im wesentlichen genauso bewiesen, wie normalerweise in der axiomatischen QFT — man betrachtet die Wirkung des CPT-Operators Θ auf Korrelationsfunktionen und benutzt deren Analytizitätseigenschaften, siehe dazu [Haa92], Seiten 96—100. Für ACQFT's auf der S^1 wurde ein ausführlicher Beweis in [BSM90] gegeben.

Das CPT-Theorem eröffnet auch einen Ausblick auf die Verbindungen, die zwischen modularen Strukturen und geometrischen Transformationen der Raumzeit bestehen: Der modulare Operator wurde mit einem speziellen Dilatationsoperator der ACQFT identifiziert, der die Raum-Zeit-Reflektion darstellt. Wir werden auf diese Zusammenhänge in §32 zurückkommen.

Konforme Kovarianz macht es uns nun möglich, die Gültigkeit der Haag-Dualität für die Intervallalgebren in diesem speziellen Fall zu *beweisen*:

Theorem 25.7 *Sei $\mathfrak{A}(\mathcal{I})$, $\mathcal{I} \subset S^1$ eigentlich, ein lokales Netz von von Neumann-Algebren, das erzeugt wird von konformen Feldern ϕ. Dann gilt für alle eigentlichen Intervalle $\mathcal{I}$ die Haag-Dualität*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}) = \mathfrak{A}(\mathcal{I}')'\,. \tag{25.19}$$

Beweis: Zunächst reicht es zu zeigen, das

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}_+) = \mathfrak{A}(\mathcal{I}_-)' = \mathfrak{A}(\mathcal{I}'_+)'\,,$$

(mit Bem.25.3) gilt, um (25.19) zu begründen. Nun wirken aber konforme Transformationen transitiv auf den eigentlichen Intervallen. Es gibt also zu beliebigem $\mathcal{I} \subset S^1$, $\mathcal{I}$ eigentlich, ein $g \in \mathrm{M}$ mit $g\mathcal{I}_+ = \mathcal{I}$. Mit der Kovarianz der ACQFT schließen wir

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}) = W(g)\mathfrak{A}(\mathcal{I}_+)W(g)^{-1} = \Big(W(g)\mathfrak{A}(\mathcal{I}'_+)W(g)^{-1}\Big)' = \mathfrak{A}(\mathcal{I}')'\,,$$

was Haag-Dualität für beliebige Intervalle zeigt, wenn sie für oberen und unteren Halbkreis gilt. Nun ist einerseits nach Definition des CPT-Operators

$$\mathfrak{A}(\mathcal{I}_+) = \Theta\mathfrak{A}(\mathcal{I}_-)\Theta^{-1}\,.$$

Andererseits ist Θ die modulare Konjugation, das heißt es ist

$$\Theta\mathfrak{A}(\mathcal{I}_-)\Theta^{-1} = \mathfrak{A}(\mathcal{I}_-)'\,.$$

Kombiniert man dies, so folgt die Behauptung. ■

Interessanterweise stellt sich heraus, daß für Theorien auf dem konformen Lichtkegel — respektive dem punktierten Kreis $S^1 \backslash \xi$ — Haag-Dualität nicht gewährleistet ist. Ein Gegenbeispiel wurde in [BSM90] gegeben.

§26 Die Universelle Algebra globaler Observablen

Wie in §24 angekündigt, ist dieser Abschnitt der Etablierung einer globalen Observablenalgebra auf der S^1 gewidmet. Wir betten zunächst das lokale Netz auf den eigentlichen Intervallen in den allgemeineren Rahmen der Garbentheorie ein.

Definition 26.1 *Eine* **Prä-Kogarbe** $\mathfrak{B}$ *von C^*-Algebren auf den eigentlichen Intervallen der S^1 ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der eigentlichen Intervalle der S^1 mit Inklusionen in die Kategorie der C^*-Algebren. Das heißt $\mathfrak{B}$ ist eine Abbildung*

$$S^1 \supset \mathcal{I} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{I}),$$

die jedem eigentlichen Intervall eine C^*-Algebra zuordnet und Homomorphismen (genannt Inklusionen)

$$\varepsilon^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{I},\mathcal{J}} \;:\; \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{J}), \quad \textit{für} \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{J},$$

so daß

$$\varepsilon^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{I},\mathcal{I}} = id_{\mathfrak{B}(\mathcal{I})},$$

gilt und folgendes Diagramm für $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{K} \subset S^1$ kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \arrow[rr, "\varepsilon^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}"] \arrow[dr, "\varepsilon^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{I},\mathcal{K}}"'] & & \mathfrak{B}(\mathcal{J}) \arrow[dl, "\varepsilon^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{J},\mathcal{K}}"] \\ & \mathfrak{B}(\mathcal{K}) & \end{tikzcd} \tag{26.1}$$

Wäre $\mathfrak{B}$ auf allen offenen Untermengen der S^1 definiert, so hieße $\mathfrak{B}$ Prä-Kogarbe auf S^1.

Das Netz der lokalen Observablenalgebren auf den eigentlichen Intervallen $\mathfrak{A}$ bildet nun gerade eine Prä-Kogarbe von C*-Algebren (sogar von von Neumann Algebren) auf den eigentlichen Intervallen wegen der Isotonie. Die Homomorphismen $\varepsilon^{\mathfrak{A}}$ sind in diesem Fall sogar injektiv, d.h. Einbettungen. Als injektive *–Homomorphismen sind sie damit Isometrien von C*–Algebren. Die Inklusionen erhalten also die Nrom der Algebrenelemente.

Das Ziel, eine globale Observablenalgebra zu definieren, wäre erreicht, wenn es gelänge diese Prä-Kogarbe in eindeutiger Weise zu einer Prä-Kogarbe auf S^1 zu *erweitern* — dann könnte man die Algebra $\mathfrak{A}(S^1)$ dieser Erweiterung als Algebra der globalen Observablen auffassen. Wir präzisieren zunächst den Begriff der *Erweiterung*:

Definition 26.2 *Seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Prä-Kogarben auf einer gemeinsamen Familie von offenen Untermengen der S^1. Eine* **Kogarbenabbildung** ϕ *von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$ ist eine Familie von Abbildungen*

$$\phi_{\mathcal{I}} \;:\; \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathfrak{C}(\mathcal{I}),$$

für jedes $\mathcal{I}$ auf dem $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ definiert sind, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \arrow[r, "\varepsilon^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{I}}"] & \mathfrak{B}(\mathcal{J}) \arrow[d, "\phi_{\mathcal{J}}"] \\ \mathfrak{C}(\mathcal{I}) \arrow[r, "\varepsilon^{\mathfrak{C}}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}"] & \mathfrak{C}(\mathcal{J}) \end{tikzcd} \tag{26.2}$$

Definition 26.3 *Eine Prä-Kogarbe $\widetilde{\mathfrak{A}}$ von C^*-Algebren auf S^1 heißt* **Erweiterung** *einer Prä-Kogarbe auf den eigentlichen Intervallen, wenn eine* **Kogarbeneinbettung***, d.h. eine auf den eigentlichen Intervallen definierte, bijektive Kogarbenabbildung von $\mathfrak{A}$ in $\widetilde{\mathfrak{A}}$ existiert.*

Die erste Frage, der wir uns nun zuwenden müssen ist, ob solche Erweiterungen der Observablen-Prä-Kogarbe überhaupt existieren. Zunächst ist kein Problem, $\mathfrak{A}$ auf alle echten offenen Untermengen der S^1 zu erweitern, da die eigentlichen Intervalle eine Basis der Topologie des Einheitskreises bilden: Man setzt

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{I}_n) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{A}(\mathcal{I}_i)\,,$$

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{I}_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{A}(\mathcal{I}_i) \quad \text{und}$$

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\emptyset) \equiv \mathbb{1}\,,$$

für endliche Vereinigungen und Schnitte[2)]. Die Zuordnung für die leere Menge ist sinnvoll, da die lokalen Observablenalgebren eine gemeinsame Einheit besitzen. Die Inklusionen $\varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ können analog aus den $\varepsilon^{\mathfrak{A}}$ zusammengebaut werden. Wie fügt man nun eine Algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}(S^1)$ hinzu? Man kann einfach eine der Intervallaglebren, sagen wir $\widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}_0)$, auswählen und

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(S^1) \equiv \widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}_0)\,,$$

setzen. Die Inklusionen $\varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{I},S^1}$ konstruiert man dann genauso, wie oben bei Schnitten, d.h. man wählt die Homomorphismen so, daß

$$\operatorname{im}\varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{I},S^1} = \widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}) \wedge \widetilde{\mathfrak{A}}(S^1) = \widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}) \wedge \widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}_0)\,,$$

gilt — also weder injektiv noch surjektiv.

Es gibt also Erweiterungen, aber die obige genügt sicher nicht unseren Anforderungen, denn wir möchten, daß die Inklusionen in die globale Algebra treue Einbettungen sind. Das eine solche Konstruktion möglich und eindeutig ist, besagt folgendes Theorem:

Theorem 26.4 *Zu einer gegebenen Prä-Kogarbe $\mathfrak{A}$ von von Neumann Algebren auf den eigentlichen Intervallen der S^1 existiert bis auf (Kogarben-)Isomorphie genau eine* **universelle Erweiterung** *$\widetilde{\mathfrak{A}}$ auf S^1, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) Die lokalen Algebren $\widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I})$ sind treu eingebettet in die globale C^*-Algebra $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}} \equiv \widetilde{\mathfrak{A}}(S^1)$,

b) $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ wird als C^*-Algebra erzeugt von den $\varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{I},S^1}(\widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}))$:

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}} = \overline{\bigcup_{\substack{\mathcal{I} \subset S^1 \\ \text{eigentlich}}} \varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{I},S^1}(\widetilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{I}))}\,, \tag{26.3}$$

und

c) **universelle Eigenschaft***: Ist $\mathfrak{B}$ eine weitere Erweiterung von $\mathfrak{A}$, die die Bedingungen a) und b) erfüllt, und sind ϕ bzw. ψ die Kogarbeneinbettungen von $\mathfrak{A}$ nach $\widetilde{\mathfrak{A}}$, bzw. von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, so existiert genau eine Kogarbenabbildung η auf den eigentlichen Intervallen (d.h. η ist*

[2)] $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ bezeichnet die größte in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthaltene von Neumann Algebra.

zwar auf allen offenen Mengen, also auch auf $\tilde{\mathfrak{A}}(S^1)$ *definiert, aber (26.2) braucht nur auf den eigentlichen Intervallen zu kommutieren), so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \tilde{\mathfrak{A}} \arrow[d, "\eta"] \\ & \mathfrak{B} \end{tikzcd} \tag{26.4}$$

kommutativ ist.

Beweis: Eindeutigkeit bis auf Isomorphie folgt auf die übliche Weise aus der universellen Eigenschaft: Sind $\tilde{\mathfrak{A}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{A}}_2$ zwei universelle Erweiterungen (d.h. a)—c) gelten) mit zugehörigen Einbettungen ϕ_1, ϕ_2, so erhält man aus den wechselseitig angewandten universellen Eigenschaften zwei Kogarbenabbildungen auf den Intervallen:

$$\eta_1 \,:\, \tilde{\mathfrak{A}}_1 \longrightarrow \tilde{\mathfrak{A}}_2\,, \quad \eta_2 \,:\, \tilde{\mathfrak{A}}_2 \longrightarrow \tilde{\mathfrak{A}}_1\,,$$

und es gilt

$$\eta_1 \circ \phi_1 = \phi_2 \quad \text{und} \quad \eta_2 \circ \phi_2 = \phi_1\,,$$

woraus

$$\eta_2 \circ \eta_1 \circ \phi_1 = \phi_1 \quad \text{und} \quad \eta_1 \circ \eta_2 \circ \phi_2 = \phi_2\,,$$

folgt. Da die Einbettungen auf den eigentlichen Intervallen Algebrenisomorphismen sind, hat man so Isomorphie der Intervallalgebren:

$$\tilde{\mathfrak{A}}_1(\mathcal{I}) \cong \tilde{\mathfrak{A}}_2(\mathcal{I})\,,$$

für alle eigentlichen Intervalle $\mathcal{I}$. Da die eigentlichen Intervalle eine Basis der Topologie der S^1 bilden und wegen a) und b) läßt sich diese Isomorphie zu einer Kogarbenisomorphie zwischen $\tilde{\mathfrak{A}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{A}}_2$ erweitern (siehe Punkt i) des folgenden Korollars). Nun zur Konstruktion von $\tilde{\mathfrak{A}}$: Betrachte die Menge

$$\{\mathfrak{B}_i \,|\, i \in \mathrm{I}\}\,,$$

aller Prä-Kogarben auf S^1 die $\mathfrak{A}$ erweitern und wenigstens b) erfüllen (also zum Beispiel solche die wie oben mit einer Intervallalgebra als globaler konstruiert sind). Seien $\{\psi^i \,|\, i \in \mathrm{I}\}$ die zugehörigen Einbettungen von $\mathfrak{A}$. Da die Intervallalgebren aller dieser Erweiterungen via der Vakuumdarstellung π_0 auf demselben Hilbertraum $\mathfrak{H}_0$ treu dargestellt sind, kann man die direkte Summe (als Vektorräume) dieser Algebren bilden und die Abbildung

$$\Psi \equiv \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \psi^i\,, \quad \Psi_{\mathcal{I}} \,: \mathfrak{A}(\mathcal{I}) \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{B}_i(\mathcal{I})\,,$$

betrachten. Dann bilden wir $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}} = \tilde{\mathfrak{A}}(S^1)$ als C*-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)$ folgendermaßen:

$$\tilde{\mathfrak{A}}(S^1) \equiv \overline{\bigvee_{\substack{\mathcal{I} \subset S^1 \\ \text{eigentlich}}} \left(\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \varepsilon^{\mathfrak{B}_i}_{\mathcal{I},S^1}(\psi^i_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))) \right)}\,,$$

d.h. als Erzeugnis aller direkten Summen der Intervallalgebren. Da alle in diese Konstruktion einbezogenen Erweiterungen b) erfüllen, erfüllt auch $\tilde{\mathfrak{A}}$ b) und da mindestens alle Erweiterungen enthalten sind, die mit einer einzigen Intervallalgebra gebildet werden, ist auch a) erfüllt. Um die universelle Eigenschaft zu zeigen, muß man nur noch η_{S^1} definieren, denn η kann auf allen eigentlichen Intervallen und damit auf allen echten offenen Untermengen der S^1 trivial gewählt werden. Da aber jede Erweiterung $\mathfrak{B}$, die unter c) auftauchen kann, bereits in der direkten Summe erscheint, kann η_{S^1} einfach als Projektion auf die entsprechende Komponente gewählt werden. ■

Wenn sich der Leser an dieser Stelle fragt, was die obigen Klimmzüge eigentlich gebracht haben, so muß daran erinnert werden, daß unser Hauptanliegen war, eine globale Algebra *eindeutig* zu erzeugen. Man kann natürlich immer (26.3) hinschreiben, aber wirkliche Relevanz erlangt diese Algebra erst durch obiges Theorem.

$\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ hat nun alle schönen Eigenschaften, die wir uns gewünscht haben.

Korollar 26.5 *i)* $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$*, wie in Thm.26.4 definiert ist als C*-Algebra bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

ii) Zu jeder nach Def.24.4 gegebenen konform kovarianten Darstellungsfamilie positiver Energie von $\mathfrak{A}$ *auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$ *existiert genau eine Fortsetzung zu einer Darstellung von* $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$.

iii) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ *operiert kanonisch durch Automorphismen auf* $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$.

Beweis: Betrachtet man wie oben zwei verschiedene universelle Erweiterung, so haben wir Isomorphie der Algebren auf den eigentlichen Intervallen gefunden. Wegen der Bedingungen a) und b) überträgt sich die Isomorphie auf die globale Algebra. Die lokalen Algebren sind durch die Abbildungsfamilie

$$i_{\mathcal{I}} \equiv \varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{I},S^1} \circ \phi_{\mathcal{I}}\,, \tag{26.5}$$

in $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ eingebettet. Für zwei eigentliche Intervalle $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ erfüllen diese Einbettungen dieselbe Kompatibilitätsbedingung wie für die Darstellungsfamilien unter (24.15) gefordert: Daraus, daß ϕ auf den eigentlichen Intervallen eine Kogarbenabbildung ist und aus der Kogarbeneigenschaft von $\widetilde{\mathfrak{A}}$ folgt

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{J}} \circ \varepsilon^{\mathfrak{A}}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I})) &= \varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{J},S^1} \circ \phi_{\mathcal{J}} \circ \varepsilon^{\mathfrak{A}}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I})) = \\ &= \varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{J},S^1} \circ \varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{I},\mathcal{J}} \circ \phi_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I})) = \varepsilon^{\widetilde{\mathfrak{A}}}_{\mathcal{J},S^1} \circ \phi_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I})) = i_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))\,, \end{aligned}$$

was nichts anderes als

$$i_{\mathcal{J}}|_{\mathfrak{A}(\mathcal{I})} = i_{\mathcal{I}}\,, \tag{26.6}$$

bedeutet. Nun zunächst zu iii): Die Kovarianzautomrphismen auf $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ sind nach (24.14) kanonisch zu definieren durch

$$\alpha_g(i_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))) \equiv i_{g\mathcal{I}}(W(g)\mathfrak{A}(\mathcal{I})W(g)^{-1}) = i_{g\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(g\mathcal{I}))\,, \tag{26.7}$$

für alle $g \in \mathrm{M}$ und eigentlichen Intervalle $\mathcal{I}$. Da $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ von den $i_{g\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(g\mathcal{I}))$ genauso erzeugt wird wie von den $i_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))$, ist klar, daß die α_g Automorphismen sind. Wir wollen nun zeigen, daß zu jeder Darstellung π von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$, die bezüglich der eben definierten Kovarianz positive Energie hat, genau eine kovariante Darstellungsfamilie positiver Energie im Sinne von Def.24.4 korrespondiert. Dazu benutzen wir die Definitionsgleichung

$$\pi \circ i_{\mathcal{I}} \equiv \pi^{\mathcal{I}}\,, \quad \forall \mathcal{I} \subset S^1 \text{ eigentlich}. \tag{26.8}$$

Von rechts nach links gelesen liefert sie zu jedem π eine im Sinne von (24.15) konsistente Darstellungsfamilie auf $\mathfrak{A}$:

$$\pi^{\mathcal{J}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I})) = \pi(i_{\mathcal{J}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))) = \pi(i_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))) = \pi^{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I})), \quad \forall \mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset S^1 \text{ eigentlich},$$

Da $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ von den $i_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))$ erzeugt wird, kann (26.8) auch von links nach rechts gelesen werden und definiert dann eine Darstellung von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ auf demselben Darstellungsraum, auf dem die Familie wirkt. Es bleibt zu zeigen, daß Kovarianz für π dasselbe bedeutet wie für die Familie $\pi^{\mathcal{I}}$. Dazu definieren wir Kovarianz für π auf die übliche Weise: Es soll eine stark stetige Darstellung von $\widetilde{\mathrm{M}}$ durch unitäre Operatoren auf $\mathfrak{H}$ existieren, so daß

$$W_\pi(\tilde{g})\pi(\mathfrak{A}_{\text{univ}})W_\pi(\tilde{g})^{-1} = \pi \circ \alpha_g(\mathfrak{A}_{\text{univ}}), \tag{26.9}$$

gilt. Gültigkeit dieser Gleichung ist äquivalent zur Gültigkeit von (24.16) für die zugehörige Darstellungsfamilie: Die linke Seite geht nach Einsetzen von $i_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I}))$ unmittelbar in die linke Seite von (24.16) über, genau wie die rechte:

$$\pi \circ \alpha_g \circ i_{\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(\mathcal{I})) = \pi \circ i_{g\mathcal{I}}(W(g)\mathfrak{A}(\mathcal{I})W(g)^{-1}) = \pi^{g\mathcal{I}}(W(g)\mathfrak{A}(\mathcal{I})W(g)^{-1}) = \pi^{g\mathcal{I}}(\mathfrak{A}(g\mathcal{I})).$$

Die Kovarianzbegriffe stimmen also überein, womit ii) gezeigt ist. ∎

Die oben bewiesene Eigenschaft ii) von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ ist genau die, die Fredenhagen zuerst in [Fre89] und dann in [FRS92] als definierende Forderung für $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ aufgestellt hat.

Wenn wir wie üblich die $\mathfrak{A}(\mathcal{I})$ mit ihren Bildern unter der Vakuumdarstellung identifizieren, dann ist klar, daß die Einbetungen $i_{\mathcal{I}}$ selbst die Vakuumdarstellung von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ induzieren. Wir werden von nun an die Einbettungen $i_{\mathcal{I}}$ weglassen und die lokalen Algebren nicht von ihren Bildern in $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ unterscheiden.

Im nächsten Abschnitt wird sich zeigen, daß π_0 auf $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ nicht treu ist — was nach dem oben gesagten an den Einbettungen $i^{\mathcal{I}}$ liegen muß. Darin wird sich ein enger Zusammenhang zwischen topologischen Eigenschaften der S^1 (Verhältnis der eigentlichen Intervalle zum Totalraum) und Eigenschaften einer auf ihr definierten ACQFT offenbaren.

Mit der universellen Algebra an der Hand können wir nun die üblichen Instrumente der DHR-Theorie, das heißt insbesondere die Beschreibung durch lokalisierte Endomorphismen von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$, benutzen.

§27 DHR-Theorie für ACQFT's

Essentiell für die DHR-Theorie sind Lokalisierbarkeitsforderungen wie das DHR-Auswahlkriterium, mit dem wir in Kapitel §1 (Axiom VIII) Darstellungen ausgewählt hatten, die in Doppelkegeln lokalisiert werden können. Die Lokalisierbarkeit der Darstellungen wird dann benutzt, um lokalisierte Endomorphismen zu konstruieren, die diese Darstellungen induzieren.

Für konforme Theorien auf der S^1 haben Buchholz *et al.* in [BMT88] gezeigt, daß jede konform kovariante Darstellungsfamilie positiver Energie bereits lokalisierbar ist: Jedes Mitglied $\pi^{\mathcal{I}}$ einer solchen Familie ist sogar unitäräquivalent zur Vakuumdarstellung $\pi_0^{\mathcal{I}}$ in demselben eigentlichen Intervall. Dies beruht darauf, daß das raumartige Komplement eines Lokalisierungsgebietes wieder ein Lokalisierungsgebiet, nämlich ein eigentliches Intervall ist (ob offen oder abgeschlossen spielt wie wir aus Bem.25.3 wissen keine Rolle). Und es ist eine lange bekannte Tatsache, daß Darstellungen positiver Energie von lokalen Netzen von von Neumann Algebren lokal normal sind (siehe [TW73]), d.h. die Einschränkungen dieser Darstellungen auf die lokalen Algebren sind äquivalent. Wie üblich können wir diese Äquivalenz für ein gewisses Intervall $\mathcal{I}_0$ und sein raumartiges Komplement ausnutzen und definieren:

Definition 27.1 *Eine konform kovariante Darstellung positiver Energie π von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{H}_\pi$ heißt* **lokalisiert** *im eigentlichen Intervall $\mathcal{I}_0$, wenn gilt:*

$$\pi^{\mathcal{I}'_0} = \pi_0|_{\mathfrak{A}(\mathcal{I}'_0)} . \tag{27.1}$$

Anders als in §4 wählen wir hier also aus dem Sektor $[\pi]$ schon eine Darstellung mit fester Lokalisierung aus, und die obigen Überlegungen sichern, daß man alle Sektoren mit positiver Energie durch lokalisierte Darstellungen erreicht.

Wir wollen nun lokalisierte Darstellungen durch konform kovariante, lokalisierte Endomorphismen von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ beschreiben. Die Strategie wird wie üblich sein, die Morphismen lokal durch Ladungstransporter zu beschreiben. Dazu werden wir die Kozykel aus §10 benutzen, durch die zugleich die Kovarianz der Morphismen beschrieben wird.

Zunächst haben wir analog zum Beweis von Korollar 10.5 unitäre $\widetilde{\mathrm{M}}$-1-Kozykel in $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_0)$:

$$\widetilde{\mathrm{M}} \ni \widetilde{g} \longmapsto X_{\widetilde{g}}(\pi) \equiv W(g)W_\pi(\widetilde{g})^{-1} ,$$
$$X_{\widetilde{gh}}(\pi) = \mathrm{Ad}\, W(g)(X_{\widetilde{h}}(\pi))\, X_{\widetilde{g}}(\pi) .$$

Ist $\mathcal{I}_0$ das Lokalisierungsintervall von π so finden wir sofort die Entsprechung von (10.8):

$$\pi^{g\mathcal{I}'_0} = \mathrm{Ad}\, X_{\widetilde{g}}(\pi)^{-1} \circ \pi_0{}^{g\mathcal{I}'_0} .$$

Man kann das aber nicht allgemein benutzen, um zu zeigen, daß die $X_{\widetilde{g}}(\pi)$ lokale Ladungstransporter sind, denn es wäre ja $X_{\widetilde{g}}(\pi) \in \mathfrak{A}(\mathcal{I}_0 \vee g\mathcal{I}_0)$. Aber das kleinste eigentliche Intervall, das $I_0 \cup gI_0$ umfaßt, ist auf S^1 nur wohldefiniert, wenn $\mathcal{I}_0 \cup g\mathcal{I}_0$ wieder ein eigentliches Intervall ist. Betrachten wir zunächst diesen Spezialfall und definieren folgende offene Menge in $\widetilde{\mathrm{M}}$:

$$\mathcal{U} \equiv \{\, \widetilde{g} \in \widetilde{\mathrm{M}} \mid \mathcal{I}_0 \cup g\mathcal{I}_0 \text{ ist ein eigentliches Intervall} \,\} .$$

Für $\widetilde{g} \in \mathcal{U}$ findet man dann wieder einen eindeutig bestimmten $\widetilde{\mathrm{M}}$-1-Kozykel bezüglich der Wirkung von α in der unitären Gruppe von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$:

$$\pi_0(X_{\widetilde{g}}) = X_{\widetilde{g}}(\pi) , \quad \forall\, \widetilde{g} \in \mathcal{U} ,$$
$$X_{\widetilde{gh}} = \alpha_{\widetilde{g}}(X_{\widetilde{g}})X_{\widetilde{h}} , \quad \forall\, \widetilde{g}, \widetilde{h} \in \mathcal{U} .$$

Lemma 27.2 *Die Abbildung $\widetilde{g} \ni \mathcal{U} \mapsto X_{\widetilde{g}}$ läßt sich auf natürliche Weise zu einem unitären $\widetilde{\mathrm{M}}$-1-Kozykel bezüglich α mit Werten in $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ erweitern, so daß*

$$\pi_0(X_{\widetilde{g}}) = X_{\widetilde{g}}(\pi) , \quad \forall\, \widetilde{g} \in \widetilde{\mathrm{M}} , \tag{27.2}$$

gilt.

Beweis: Es folgt aus standard-Argumenten, daß die von $\mathcal{U}$ in $\widetilde{\mathrm{M}}$ erzeugte Untergruppe schon ganz $\widetilde{\mathrm{M}}$ ist, denn $\mathcal{U}$ ist eine offene Umgebung der Einheit und $\widetilde{\mathrm{M}}$ ist einfach zusammenhängend. Das heißt, jedes $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathrm{M}}$ kann geschrieben werden als

$$\widetilde{g} = \prod_{i=1}^{n} \widetilde{g}_i , \quad \widetilde{g}_i \in \mathcal{U} .$$

Definiert man den unitären Operator $X_{\widetilde{g}} \in \mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ durch

$$X_{\widetilde{g}} \equiv \alpha_{\widetilde{g}_1 \ldots \widetilde{g}_{n-1}}(X_{\widetilde{g}_n}) \ldots \alpha_{\widetilde{g}_1}(X_{\widetilde{g}_2}) X_{\widetilde{g}_1} ,$$

so ist die Kozykelidentität automatisch erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß diese Definition natürlich ist, d.h., daß sie nicht von der speziellen Wahl der $\widetilde{g}_1 , \ldots , \widetilde{g}_n$ abhängt. Das ist aber klar, wenn man bedenkt, daß $\widetilde{g}_1 , \widetilde{g}_1\widetilde{g}_2 , \ldots , \widetilde{g}_1 \ldots \widetilde{g}_n = \widetilde{g}$ einen diskreten Pfad in $\widetilde{\mathrm{M}}$ bildet. Man sieht dann sofort, daß $X_{\widetilde{g}}$ invariant gegenüber der elementaren Homotopiedeformation ist, die in diesem Fall aus dem Einfügen eines weiteren Elements $\widetilde{h}$ zwischen $\widetilde{g}_i$ und $\widetilde{g}_{i+1}$ besteht. Da $\widetilde{\mathrm{M}}$ einfach zusammenhängend ist, folgt die Invarianz von $X_{\widetilde{g}}$. ■

Damit können wir jetzt Endomorphismen auf $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ durch solche Kozykel ausdrücken und damit die DHR-Theorie auf $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ formulieren.

Theorem 27.3 *Zu jeder konform kovarianten Darstellung positiver Energie π von $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ existiert ein eindeutig bestimmter Endomorphismus ρ von $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$, so daß*

$$\pi = \pi_0 \circ \rho , \quad \mathit{auf}\, \mathfrak{A}_{\mathrm{univ}} .$$

ρ ist konform kovariant mit positiver Energie und genauso lokalisiert wie π .

Beweis: Sei π lokalisiert in $\mathcal{I}_0$. Wir bezeichnen den zugehörigen $\widetilde{\mathrm{M}}$-1-Kozykel in $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$, der (27.2) erfüllt, mit

$$X_{\widetilde{g}}(\rho) \equiv X_{\widetilde{g}} , \quad \forall\, \widetilde{g} \in \widetilde{\mathrm{M}} .$$

Dann definieren wir eine Familie von Endomorphismen der lokalen Algebren kanonisch durch

$$\rho^{g\mathcal{I}_0'} \equiv \mathrm{Ad}\, X_{\widetilde{g}}(\rho)^{-1}|_{\mathfrak{A}(g\mathcal{I}_0')} . \tag{27.3}$$

Da sich jedes eigentliche Intervall als $g\mathcal{I}_0'$ mit geeignetem $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathrm{M}}$ schreiben läßt und da diese Familie konsistent ist im Sinne von (24.15):

$$\rho^{\mathcal{I}}|_{\mathfrak{A}(\mathcal{J})} = \rho^{\mathcal{J}} , \quad \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \subset S^1 \text{ eigentlich},$$

definiert sie einen eindeutig bestimmten Endomorphismus ρ von $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$, der offensichtlich in $\mathcal{I}_0$ lokalisiert ist. Weiter finden wir

$$\pi^{g\mathcal{I}_0'} = \mathrm{Ad}\, X_{\widetilde{g}}(\pi)^{-1} \circ {\pi_0}^{g\mathcal{I}_0'} = \pi_0 \circ \mathrm{Ad}\, X_{\widetilde{g}}(\rho)^{-1}|_{\mathfrak{A}(g\mathcal{I}_0')} = \pi_0 \circ \rho^{g\mathcal{I}_0'} , \quad \forall\, \widetilde{g} \in \widetilde{\mathrm{M}} ,$$

d.h. ρ induziert π auf $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$. Die Kovarianz von ρ wird erzeugt von

$$W_\rho(\widetilde{g}) \equiv \pi_0(X_{\widetilde{g}}(\rho)^{-1}) W(g) , \quad \forall\, \widetilde{g} \in \widetilde{\mathrm{M}} , \tag{27.4}$$

entsprechend Satz 10.5. Positivität der Energie, d.h. Positivität des Generators von

$$U_\rho(t) \equiv W_\rho(\widetilde{\rho(t)}) , \tag{27.5}$$

folgt aus den entsprechenden Eigenschaften von $U(t)$, $U_\pi(t)$. ■

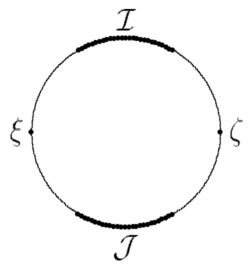


Fig. 28.1: Anordnung von Intervallen und Referenzpunkten auf dem Einheitskreis.

§28 Das Zentrum der universellen Algebra

Wir gehen jetzt daran die Besonderheiten einer ACQFT auf der S^1 vom Standpunkt der DHR-Theorie aus zu erkunden. Das interessanteste Ergebnis wird sein, daß die Vakuumdarstellung auf $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ nicht treu ist: Es existieren — in gewissem Sinne globale — Operatoren, die unter ihr auf die Identität von $\mathfrak{H}_0$ abgebildet werden. Daß solche Operatoren im Zusammenhang mit der Beschreibung der Zopfgruppenstatistik auftauchen, hängt eng mit den geometrischen Eigenschaften der S^1 zusammen.

Betrachten wir folgende Situation: Wir nehmen uns zwei Intervalle $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ her, so daß $\mathcal{I}' \cap \mathcal{J}'$ zwei Zusammenhangskomponenten besitzt, und denken uns die S^1 an zwei Punkten ξ, ζ aufgeschnitten, die jeweils in einer dieser Komponenten liegen. Algebraisch wird diese Dekompaktifizierung dargestellt, indem wir uns auf die C*-Unteralgebren

$$\mathfrak{A}_\xi \equiv \overline{\bigcup_{\substack{\mathcal{I}\subset S^1,\,\xi\notin\mathcal{I}\\ \text{eigentlich}}} \mathfrak{A}(\mathcal{I})}\,, \quad \mathfrak{A}_\zeta \equiv \overline{\bigcup_{\substack{\mathcal{I}\subset S^1,\,\zeta\notin\mathcal{I}\\ \text{eigentlich}}} \mathfrak{A}(\mathcal{I})}\,, \tag{28.1}$$

von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ einschränken, auf denen alle DHR-Endomorphismen von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$, deren Lokalisierungsintervalle keinen der beiden herausgenommenen Punkte umfassen in natürlicher Weise definiert sind[3)].

Für jede solche Dekompaktifizierung können wir nun eine Ordnung der eigentlichen Intervalle einführen: Wir sagen ein Intervall $\mathcal{I}$ liege bezüglich ξ rechts von einem dazu raumartig gelegenen Intervall $\mathcal{J}$, in Zeichen $\mathcal{I} > \mathcal{J}$, wenn es von $\mathcal{J}$ aus durch eine positive Rotation zu erreichen ist ohne ξ zu überqueren. In der obigen Situation gilt also $\mathcal{I} > \mathcal{J}$ bezüglich ξ und $\mathcal{J} > \mathcal{I}$ bezüglich ζ.

Sei nun ρ ein in $\mathcal{I}$ lokalisierter DHR-Endomorphsimus von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ und σ ein in $\mathcal{J}$ lokalisierter. Dann können wir in jeder der beiden Unteralgebren $\mathfrak{A}_\xi$ und $\mathfrak{A}_\zeta$ den statistischen Operator des Morphismenpaares (ρ, σ) bilden. Definieren wir aber die Zopfgruppenstatistik in beiden Algebren konsistent zu §16, so kommt (16.4) zum tragen, das heißt $\varepsilon_\xi(\rho, \sigma) = \mathbb{1} \in \mathfrak{A}_\xi$ und $\varepsilon_\zeta(\sigma, \rho) = \mathbb{1} \in \mathfrak{A}_\zeta$. Auf $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ können diese beiden Bedingungen aber nur zusammenpassen, wenn die Monodromie trivial ist, d.h. wenn tatsächlich nur Permutationsgruppenstatistik vorliegt!

[3)] Es ist zu bemerken, daß dies im Sinne der DHR-Theorie keine triviale Dekompaktifizierung ist — wie wir in §25 gesehen hatten läßt sich auf $\mathbb{R}$ ja gar keine DHR-Theorie formulieren, weil dort im allgemeinen keine Haag-Dualität gilt. Demgegenüber sind die DHR-Endomorphismen z.B. auf $\mathfrak{A}_\xi$ ja unter Zuhilfenahme der Haag-Dualität auf der universellen Algebra der S^1 definiert.

Konstruieren wir nun *globale* Intertwiner: Seien $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, ξ, ζ wie oben und diesmal σ und ρ beides in $\mathcal{I}$ lokalisierte konform kovariante Endomorphismen. Sei weiter ein $\widehat{\rho} \in [\rho]$ mit Lokalisierung in $\mathcal{J}$ gewählt. Für dies Geometrie stimmen die statistischen Intertwiner überein:

$$\varepsilon(\rho,\sigma) = \varepsilon(\sigma,\rho) \in \mathfrak{A}(\mathcal{I}) \subset \mathfrak{A}_\xi \cap \mathfrak{A}_\zeta \,.$$

Betrachten wir einen unitären Intertwiner $\mathcal{V}$ unter der Vakuumdarstellung von $\pi_0\rho$ nach $\pi_0\widehat{\rho}$. Wegen der Haag-Dualität in der Vakuumdarstellung liegt $\mathcal{V}$ sowohl in $\pi_0(\mathfrak{A}_\xi)$ wie in $\pi_0(\mathfrak{A}_\zeta)$. Seien $V_+ \in \mathfrak{A}_\zeta$, $V_- \in \mathfrak{A}_\xi$ die Urbilder: $\pi_0(V_+) = \pi_0(V_-) = \mathcal{V}$. Wir wollen nun die globalen Intertwiner

$$V_\rho \equiv V_+^* V_- \in (\rho|\rho)\,, \tag{28.2}$$

untersuchen.

Lemma 28.1 *Die V_ρ sind unabhängig von $\mathcal{V}$ und von der Wahl von $\widehat{\rho}$ im Sektor $[\rho]$. Weiter kommutiert V_ρ mit allen Intertwinern aus $(\rho|\rho)$.*

Beweis: Zunächst zum zweiten Teil der Aussage: Sei $T \in (\rho|\rho)$, dann ist $\mathcal{V}\pi_0(T)$ eine alternative Wahl zu $\mathcal{V}$, die statt auf $V_\pm$ auf $V_\pm T = V_\pm T V_\pm^* V_\pm \in (\widehat{\rho}|\rho)$ führt. Nun ist aber $V_\pm T V_\pm^* \in (\widehat{\rho}|\widehat{\rho})$, und deshalb ist $V_\pm T V_\pm^* \in \mathfrak{A}(\mathcal{J})$, d.h. für beide Vorzeichen sind dies lokale Operatoren mit demselben Bild unter π_0, die somit übereinstimmen müssen:

$$V_+ T V_+^* = V_- T V_-^* \,.$$

Für V_ρ folgt damit

$$T^* V_\rho T = T^* V_+^* V_- T = V_+^*(V_+ T^* V_+^*)(V_- T V_-^*) V_- = V_+^* V_- = V_\rho\,,$$

d.h. T kommutiert mit V_ρ. Variiert man $\widehat{\rho}$ im Sektor $[\rho]$, d.h. geht man zu $\mathrm{Ad}\, U \circ \widehat{\rho}$ mit unitärem U über, so ändert sich $\mathcal{V}$ in $\pi_0(U)\mathcal{V}$, was (28.2) trivial invariant läßt. ■

Nun gilt immer noch $\mathcal{I} > \mathcal{J}$ bzgl. ξ und $\mathcal{J} > \mathcal{I}$ bzgl. ζ, und wir können die statistischen Operatoren aus den $V_\pm$ berechnen: In $\mathfrak{A}_\zeta$ ist

$$\varepsilon(\rho,\sigma) = \sigma(V_+)^* V_+\,,$$

und umgekehrt gilt in $\mathfrak{A}_\xi$

$$\varepsilon(\sigma,\rho) = \sigma(V_-)^* V_- \,.$$

Damit ist

$$\varepsilon(\rho,\sigma) V_\rho \varepsilon(\sigma,\rho) = \sigma(V_+)^* V_+ V_+^* V_- V_-^* \sigma(V_-) = \sigma(V_\rho)\,, \tag{28.3}$$

und somit

$$\pi_0(\sigma(V_\rho)) = \pi_0(\varepsilon(\rho,\sigma)\varepsilon(\sigma,\rho))\,, \tag{28.4}$$

denn $\pi_0(V_\rho) = \mathbb{1}$. (28.3) steht im Widerspruch zu Gleichung (16.7i), die somit für globale Intertwiner im allgemeinen nicht gilt. Weiterhin wird durch (28.4) klar, daß die Vakuumdarstellung auf $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ nicht treu ist: Während V_ρ unter π_0 trivial dargestellt wird, ist sein Wert unter $\pi_0 \circ \sigma$ gleich dem Monodromieoperator.

Satz 28.2 *i) Die globalen Operatoren*

$$W_\rho \equiv R_{\overline{\rho}}^* V_\rho R_{\overline{\rho}}\,, \tag{28.5}$$

liegen im Zentrum $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}} \cap \mathfrak{A}'_{\mathrm{univ}}$ *der universellen Algebra.*

ii) Falls ρ *irreduzibel ist, gilt*

$$W_\rho = \omega_\rho^2 \cdot \phi_\rho(V_\rho)\,. \tag{28.6}$$

iii) Die W_ρ *hängen nur von der Klasse* $[\rho]$ *ab. Ihre Werte in verschiedenen Darstellungen sind (für* ρ_{I}, ρ_{J} *irreduzibel):*

$$\pi_0(\rho_{\mathrm{J}}(W_{\rho_{\mathrm{I}}})) = \pi_0(\rho_{\mathrm{J}}(W_{\rho_{\bar{\mathrm{I}}}}))^* = \pi_0(\rho_{\mathrm{I}}(W_{\rho_{\mathrm{J}}}) = \sum_{\mathrm{K}} N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}} \frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{J}}} \frac{d_{\mathrm{K}}}{d_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{J}}} \cdot \mathbb{1}\,. \tag{28.7}$$

iv) Die zentralen Elemente $C_\rho \equiv d_\rho \cdot W_\rho$ *erfüllen die* **Fusionsalgebra** *:*

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\;\; C_\rho^* = C_{\overline{\rho}}\,, \quad \text{(b)}\;\; C_{\sigma\rho} = C_\sigma C_\rho\,, \\ &\text{(c)}\;\; C_\rho = \sum_{\mathrm{I}} (N_\rho)^{\mathrm{I}} \cdot C_{\mathrm{I}}\,. \end{aligned} \tag{28.8}$$

Beweis: Daß die W_ρ zentral sind, folgt unmittelbar aus ihrer Intertwiner-Eigenschaft: $W_\rho \in (\iota|\iota)$. ii) folgt aus der Konstruktion von $R_{\overline{\rho}} = \varepsilon(\overline{\rho}, \rho) R_\rho$:

$$W_\rho = R_\rho^* \varepsilon(\overline{\rho}, \rho)^* V_\rho \varepsilon(\overline{\rho}, \rho) R_\rho = R_\rho^* \varepsilon(\overline{\rho}, \rho)^* \varepsilon(\rho, \overline{\rho})^* \overline{\rho}(V_\rho) R_\rho = \omega_\rho^2 \cdot \phi_\rho(V_\rho)\,.$$

Hält man ρ, $\overline{\rho}$ fest, so ist $R_{\overline{\rho}}$ eindeutig bis auf Änderungen der Form

$$R_{\overline{\rho}} \longmapsto U\rho(\overline{U}) R_{\overline{\rho}}\,, \quad U \in (\rho|\rho)\,,\ \overline{U} \in (\overline{\rho}|\overline{\rho}) \text{ unitär,}$$

(da ρ nicht als irreduzibel vorausgestzt ist, ist R_ρ nicht eindeutig). U kommutiert nach Lemma 28.1 mit V_ρ und $\rho(\overline{U})$ tut dies trivial. Daher bleibt W_ρ unter einer solchen Änderung invariant. Ändert man ρ und $\overline{\rho}$ in ihren jeweiligen Sektoren mit beliebigen Unitären in $\mathrm{Ad}\, U \circ \rho$ und $\mathrm{Ad}\, \overline{U} \circ \overline{\rho}$, so kann man $\mathrm{Re}_{\overline{\rho}}$ wieder ersetzen durch $U\rho(\overline{U}) R_{\overline{\rho}}$ und V_ρ durch $UV_\rho U^{-1}$. Nach dem eben gesagten lassen auch diese Änderungen W_ρ invariant. Um (28.7) abzuleiten, rechnen wir

$$\begin{aligned} \pi_0(\rho_{\mathrm{J}}(W_{\rho_{\mathrm{I}}})) &= \pi_0(\rho_{\mathrm{J}}(R_{\bar{\mathrm{I}}}^* V_{\rho_{\mathrm{I}}} R_{\bar{\mathrm{I}}})) = \pi_0 \left\{ \rho_{\mathrm{J}}(R_{\bar{\mathrm{I}}}^*) \varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) \rho_{\mathrm{J}}(R_{\bar{\mathrm{I}}}) \right\} = \\ &= \pi_0 \left\{ R_{\bar{\mathrm{I}}}^* \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm{I}}}, \rho_{\mathrm{J}})^* \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\bar{\mathrm{I}}})^*) R_{\bar{\mathrm{I}}} \right\} = \pi_0 \left\{ \phi_{\rho_{\bar{\mathrm{I}}}}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm{I}}}, \rho_{\mathrm{J}})^* \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\bar{\mathrm{I}}})^*) \right\}\,, \end{aligned}$$

mit (28.4) und einer offensichtlichen Zopfidentität. Für irreduzible ρ_{I}, ρ_{J} ist der Teil $\{\,\ldots\} \in (\rho_{\mathrm{J}}|\rho_{\mathrm{J}})$ ein Skalar und kann geschrieben werden als

$$\rho_{\mathrm{J}}(R_{\bar{\mathrm{I}}}^*) \varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) \rho_{\mathrm{J}}(R_{\bar{\mathrm{I}}}) = R_{\bar{\mathrm{I}}}^* \cdot \phi_{\rho_{\mathrm{J}}}(\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}})) \cdot R_{\bar{\mathrm{I}}} = \phi_{\rho_{\mathrm{J}}}(\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}))\,.$$

Fügt man in den letzten Ausdruck zwei vollständige Einheiten ein:

$$\phi_{\rho_{\mathrm{J}}}(\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}})) = \sum_e \phi_{\rho_{\mathrm{J}}}(T_e T_e^* \varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\mathrm{I}}) T_e T_e^*)\,,$$

und wertet mit Hilfe von (18.17) und (18.20) aus, so erhält man die erste Form und wegen der offensichtlichen Symmetrie auch die dritte Darstellung aus (28.7). Bleibt noch die Identität der äußeren beiden Größen mit der mittleren zu zeigen:

$$\begin{aligned} \pi_0(\rho_{\mathrm{J}}(W_{\rho_{\bar{\mathrm{I}}}})) &= \pi_0 \{ \rho_{\mathrm{J}}(R_{\mathrm{I}}^*) \varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm{I}}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\bar{\mathrm{I}}}) \rho_{\mathrm{J}}(R_{\mathrm{I}}) \} = \\ &= \pi_0 \{ \phi_{\rho_{\mathrm{J}}}(\rho_{\mathrm{J}}(R_{\mathrm{I}}^*) \varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm{I}}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\bar{\mathrm{I}}}) \rho_{\mathrm{J}}(R_{\mathrm{I}})) \} = \\ &= \pi_0 \{ R_{\mathrm{I}}^* \phi_{\rho_{\mathrm{J}}}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm{I}}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\bar{\mathrm{I}}})) R_{\mathrm{I}} \} = \pi_0 \{ \phi_{\rho_{\mathrm{J}}}(\varepsilon(\rho_{\bar{\mathrm{I}}}, \rho_{\mathrm{J}}) \varepsilon(\rho_{\mathrm{J}}, \rho_{\bar{\mathrm{I}}})) \} = \\ &= \pi_0(\rho_{\bar{\mathrm{I}}}(W_{\rho_{\bar{\mathrm{J}}}}))^*\,, \end{aligned}$$

wieder beachtend, daß $\{\ \ldots\}$ ein Skalar ist und zuletzt mit dem Ergebnis der obigen Rechnung vergleichend. Nun zu iv): Um (b) zu zeigen, müssen wir zunächst $V_{\sigma\rho}$ durch V_σ und V_ρ ausdrücken. Dies ist leicht möglich durch die Wahl

$$\begin{aligned} V_{\sigma\rho+} &\equiv V_{\sigma+}\sigma(V_{\rho+}) = V_{\sigma+}V_{\rho+}\varepsilon(\rho,\sigma)^*\,, \quad \text{und} \\ V_{\sigma\rho-} &\equiv V_{\sigma-}\sigma(V_{\rho-}) = V_{\sigma-}V_{\rho-}\varepsilon(\rho,\sigma)^*\,, \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} V_{\sigma\rho} &= \sigma(V_{\rho+}^*)V_{\sigma+}^*V_{\sigma-}V_{\rho-}\varepsilon(\rho,\sigma)^* = V_\sigma\sigma(V_{\rho+})^*V_{\rho-}\varepsilon(\rho,\sigma)^* = \\ &= V_\sigma\sigma(V_{\rho+})^*V_{\rho+}V_\rho\varepsilon(\rho,\sigma)^* = V_\sigma\varepsilon(\rho,\sigma)V_{\rho+}V_\rho\varepsilon(\rho,\sigma)^*\,, \end{aligned}$$

wird. Wählen wir weiter $R_{\overline{\sigma\rho}} = \sigma(R_{\overline{\rho}})R_{\overline{\sigma}}$, so rechnen wir weiter:

$$\begin{aligned} W_{\sigma\rho} &= R_{\overline{\sigma}}^*\sigma(R_{\overline{\rho}}^*)V_\sigma\varepsilon(\rho,\sigma)^*V_\rho\sigma(R_{\overline{\rho}})R_{\overline{\sigma}} = R_{\overline{\sigma}}^*\sigma(R_{\overline{\rho}}^*)V_\sigma\varepsilon(\rho,\sigma)V_\rho\rho(\varepsilon(\overline{\rho},\sigma))R_{\overline{\rho}}R_{\overline{\sigma}} = \\ &= R_{\overline{\sigma}}^*V_\sigma\sigma(R_{\overline{\rho}}^*)\varepsilon(\rho,\sigma)\rho(\varepsilon(\overline{\rho},\sigma))V_\rho R_{\overline{\rho}}R_{\overline{\sigma}} = R_{\overline{\sigma}}^*V_\sigma R_{\overline{\rho}}^*\rho(\varepsilon(\overline{\rho},\sigma)^*\varepsilon(\overline{\rho},\sigma))V_\rho R_{\overline{\rho}}R_{\overline{\sigma}} = \\ &= R_{\overline{\sigma}}^*V_\sigma R_{\overline{\rho}}^*V_\rho R_{\overline{\rho}}R_{\overline{\sigma}} = R_{\overline{\sigma}}^*V_\sigma R_{\overline{\sigma}}R_{\overline{\rho}}^*V_\rho R_{\overline{\rho}} = W_\sigma W_\rho\,, \end{aligned}$$

wobei zuletzt benutzt wurde, daß W_ρ zentral ist. Zu c): Sei ρ_{I} lokalisiert in $\mathcal{I}$ und $T\in(\rho|\rho_{\mathrm{I}})$: Dann ist $V_{\rho\pm}TV_{\mathrm{I}\pm}^*$ ein intertwining Operator aus $(\widehat{\rho}|\widehat{\rho}_{\mathrm{I}})$. Für beide Vorzeichen haben diese Operatoren dasselbe Bild unter π_0 und stimmen daher in $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ überein. Dann folgt

$$\begin{aligned} & V_{\rho-}T = V_{\rho-}T \\ \Longleftrightarrow\quad & V_{\rho-}TV_{\mathrm{I}+}^*V_{\mathrm{I}-} = V_{\rho+}V_{\rho+}^*V_{\rho-}T \\ \Longleftrightarrow\quad & V_{\rho+}TV_{\mathrm{I}+}^*V_{\mathrm{I}-} = V_{\rho+}V_{\rho+}^*V_{\rho-}T \\ \Longleftrightarrow\quad & TV_{\mathrm{I}} = V_\rho T\,. \end{aligned}$$

Als nächstes benutzen wir die natürlichen Orthonormalbasen T_e^α von $(\rho|\rho_{\mathrm{I}})$ mit $e = \left({}_{0}\,{}^{\mathrm{I}}\,{}_{\rho}\right)$ und $T_{\overline{e}}^\alpha$ von $(\overline{\rho}|\rho_{\overline{\mathrm{I}}})$ mit $\overline{e} = \left({}_{0}\,{}^{\overline{\mathrm{I}}}\,{}_{\overline{\rho}}\right)$, wobei $\alpha = 1\,,\ \ldots,\,(N_\rho)^{\mathrm{I}} = (N_{\overline{\rho}})^{\mathrm{I}}$. Mit diesen Basen lassen sich zwei Orthonormalbasen des Intertwinerraums $(\rho_{\mathrm{I}}\overline{\rho}|\iota)$ bilden:

$$\left\{\sqrt{d_\rho/d_{\mathrm{I}}}\cdot T_e^{\alpha *}R_{\overline{\rho}}\right\} \quad \text{und} \quad \{\rho_{\mathrm{I}}(T_{\overline{e}}^\alpha)R_{\overline{\mathrm{I}}}\}\ ,$$

(Orthonormalität sieht man z.B. für die erste Basis leicht so:

$$\begin{aligned} (T_e^{\alpha *}R_{\overline{\rho}}\,,\,T_e^{\beta *}R_{\overline{\rho}}) &= R_{\overline{\rho}}^*T_e^\alpha T_e^{\beta *}R_{\overline{\rho}} = R_\rho^*\varepsilon(\overline{\rho},\rho)^*T_e^\alpha T_e^{\beta *}\varepsilon(\overline{\rho},\rho)R_\rho = \\ &= R_\rho^*\rho(T_e^\alpha T_e^{\beta *})R_\rho = \phi_\rho(T_e^\alpha T_e^{\beta *}) = \delta_{\alpha\beta}\frac{d_{\mathrm{I}}}{d_\rho}\,, \end{aligned}$$

mit (18.17)). einsetzen dieser Basen in die Defintion von C_ρ liefert

$$C_\rho = d_\rho\cdot R_{\overline{\rho}}^*V_\rho R_{\overline{\rho}} = \sum_{e,\alpha} d_\rho\cdot R_{\overline{\rho}}^*T_e^\alpha V_{\mathrm{I}}T_e^{\alpha *}R_{\overline{\rho}} = \sum_{\overline{e},\alpha} d_{\mathrm{I}}\cdot R_{\overline{\mathrm{I}}}^*\rho_{\mathrm{I}}(T_{\overline{e}}^{\alpha *})V_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I}}(T_{\overline{e}}^\alpha)R_{\overline{\mathrm{I}}} = \sum_{\mathrm{I}}(N_\rho)^{\mathrm{I}}\cdot C_{\mathrm{I}}\,,$$

Um schließlich a) zu zeigen wählen wir ρ, $\overline{\rho}$ lokalisiert in $\mathcal{I}$ und aus den jeweiligen Sektoren $\widehat{\rho}$, $\widehat{\overline{\rho}}$ lokalisiert in $\mathcal{J}$ und zwei Punkte ξ, ζ, so daß diesmal $\mathcal{J} > \mathcal{I}$ bezüglich ξ und $\mathcal{I} > \mathcal{J}$ bezüglich ζ. Dann gilt zum Beispiel in $\mathfrak{A}_\xi$, daß $\varepsilon(\widehat{\overline{\rho}},\overline{\rho}) = \mathbb{1}$ woraus folgt, daß:

$$\overline{V}_+ \equiv d_\rho\cdot R_\rho^*\overline{\rho}(V_+^*R_{\widehat{\overline{\rho}}}) = d_\rho\cdot R_\rho^*\varepsilon(\rho,\overline{\rho})\rho(\varepsilon(\widehat{\overline{\rho}},\overline{\rho}))V_+^*R_{\widehat{\overline{\rho}}} = d_\rho\cdot R_\rho^*\varepsilon(\rho,\overline{\rho})V_+^*R_{\widehat{\overline{\rho}}}\in(\widehat{\overline{\rho}}|\overline{\rho})\subset\mathfrak{A}_\xi\,,$$

eine sinnvolle Wahl für den Ladungstransporter von $\overline{\rho}$ nach $\widehat{\overline{\rho}}$ ist. Analog wählen wir

$$\overline{V}_- \equiv d_\rho \cdot R_\rho^* \varepsilon(\rho,\overline{\rho}) V_-^* R_{\widehat{\overline{\rho}}} ,$$

in $\mathfrak{A}_\zeta$. Die $\overline{V}_\pm$ sind wieder unitäre Ladungstransporter mit denselben Bildern unter π_0. Dann ist

$$W_{\overline{\rho}} = R_\rho^* \overline{V}_+^* \overline{V}_- R_\rho = d_\rho^2 \cdot R_\rho^* R_{\widehat{\overline{\rho}}}^* V_+ \varepsilon(\rho,\overline{\rho})^* R_\rho R_\rho^* \varepsilon(\rho,\overline{\rho}) V_-^* R_{\widehat{\overline{\rho}}} R_\rho .$$

Benutzt man, daß $V_-^* R_{\widehat{\overline{\rho}}} R_\rho = \rho\widehat{\overline{\rho}}(R_\rho) V_-^* R_{\widehat{\overline{\rho}}} = \rho(R_\rho) V_-^* R_{\widehat{\overline{\rho}}}$ (wegen $R_\rho \in \mathfrak{A}(\mathcal{I})$), und ähnlich $R_\rho^* R_{\widehat{\overline{\rho}}}^* V_+ = R_{\widehat{\overline{\rho}}}^* V_+ \rho(R_\rho^*)$, und weiter, daß man für $R_{\overline{\rho}}$ auch $\varepsilon(\rho,\overline{\rho})^* R_\rho$ wählen kann, so kann man dies umschreiben in

$$W_{\overline{\rho}} = R_{\widehat{\overline{\rho}}}^* V_+ \rho(R_\rho^*) R_{\overline{\rho}} R_{\overline{\rho}}^* \rho(R_\rho) V_-^* R_{\widehat{\overline{\rho}}} .$$

Weiter ist ja $\rho(R_\rho^*) R_{\overline{\rho}} R_{\overline{\rho}}^* \rho(R_\rho) = d_\rho^{-2}$ (nach einer leichten Variation von (18.17)), und damit

$$W_{\overline{\rho}} = R_{\widehat{\overline{\rho}}}^* V_+ V_-^* R_{\widehat{\overline{\rho}}} = W_{\widehat{\rho}}^* = W_\rho^* ,$$

wobei wir schließlich noch benutzt haben, daß man offenbar $\widehat{V}_\pm = V_\mp^*$ wählen kann und daß W_ρ invariant im Sektor $[\rho]$ ist. Damit ist a) gezeigt. ■

§29 Das Spin-Statistik-Theorem

Ohne weiter Informationen können wir nun eine Verbindung zwischen den statistischen Phasen eines Sektors und dem konformen Spin ableiten. Für einen Morphismus ρ von $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ bedeutet „konfomer Spin“ das Verhalten unter einer Drehung des Kreises um 2π. Für eine solche liest sich die Kovarianzbedingung so:

$$U_\rho(2\pi)\pi_0(\rho(A))U_\rho(2\pi)^{-1} = \pi_0(\rho(\alpha_{\rho(2\pi)}(A))) = \pi_0(\rho(A)) , \quad A \in \mathfrak{A}_{\mathrm{univ}} .$$

Ist ρ irreduzibel, dann folgt daraus, daß $U_\rho(2\pi)$ ein Skalar ist:

$$U_\rho(2\pi) = e^{2\pi i h_\rho} \cdot \mathbb{1} , \tag{29.1}$$

mit der sogenannten **konformen Skalierungsdimension** h_ρ, die das Infimum des Spektrums des Generators $T_0^{(\rho)}$ von $U_\rho(t)$ ist. Dieses Infimum existiert wegen der Spektrumsbedingung für einen Morphismus ρ mit positiver Energie.

Sei jetzt ρ lokalisiert in einem Intervall $\mathcal{I}$, das klein genug ist, um sich nicht mit seinem rotierten Gegenstück $\rho(\pi)\mathcal{I}$ zu schneiden. Wir können nun die Argumente aus §28 wiederholen für den Spezialfall $\mathcal{J} = \rho(\pi)\mathcal{I}$, $\widehat{\rho} = \rho_\pi = \alpha_{\rho(\pi)} \circ \rho \circ \alpha_{\rho(\pi)}^{-1}$, das heißt, für den um π gedrehten Morphismus. Dann wählen wir als Intertwiner $\mathcal{V}$ unter π_0 von ρ nach ρ_π:

$$\mathcal{V} = \pi_0(X_{\widetilde{\rho(\pi)}}(\rho)) = U(\pi)U_\rho(\pi)^{-1} . \tag{29.2}$$

Damit haben wir sofort auch das Urbild in $\mathfrak{A}_\zeta$, nämlich

$$V_+ = X_{\widetilde{\rho(\pi)}}(\rho) . \tag{29.3}$$

Für das Urbild in $\mathfrak{A}_\xi$ sollten wir einen Ausdruck finden, der sich ausschließlich auf die *umgekehrte* Rotation um $-\pi$ bezieht. Dazu folgende Überlegung: Zunächst ist einerseits (wir schreiben kurz $X_t(\rho)$ für $X_{\widetilde{\rho(t)}}(\rho)$ und ebenso für die $\alpha_{\rho(t)}$, etc.)

$$X_{-2\pi}(\rho) = \alpha_{-\pi}(X_{-\pi}(\rho))X_{-\pi}(\rho)\,, \tag{29.4}$$

wegen der Kozykeleigenschaft der $X_{\tilde{g}}(\rho)$. $X_{-2\pi}(\rho)$ ist aber für irreduzibles ρ ein Skalar:

$$X_{-2\pi}(\rho) = U(-2\pi)U_\rho(-2\pi)^{-1} = e^{2\pi i h_\rho}\,. \tag{29.5}$$

Der Teil $\alpha_{-\pi}(X_{-\pi}(\rho))$ aus (29.4) ist in $(\rho_{-2\pi}|\rho_{-\pi}) = (\rho|\rho_{-\pi})$, also in $\mathfrak{A}_\xi$ und wir können V_- als sein Inverses setzen:

$$V_- = \alpha_{-\pi}(X_{-\pi}(\rho)) = X_{-2\pi}(\rho)^{-1}X_{-\pi}(\rho) = X_{-\pi}(\rho)e^{-2\pi i h_\rho}\,. \tag{29.6}$$

Diese Wahl ist wie man sieht nicht eindeutig, aber die Rechnung macht klar, daß in jedem Fall der relative Phasenfaktor $e^{2\pi i h_\rho}$ auftreten muß, denn nur so stimmen die Bilder dieser Intertwiner unter der Vakuumdarstellung überein:

$$\begin{aligned}\pi_0(V_+V_-^*) &= \pi_0(X_\pi(\rho))\pi_0(X_{-\pi}(\rho))e^{2\pi i h_\rho} = U(\pi)U_\rho(\pi)^{-1}U_\rho(-\pi)U(-\pi)^{-1}e^{2\pi i h_\rho} = \\ &= U(2\pi)U_\rho(-2\pi)e^{2\pi i h_\rho} = \mathbb{1}\,,\end{aligned}$$

wie es sein soll, denn $U(2\pi) = \mathbb{1}$, $h_0 = 1$.

Für zwei irreduzible Morphismen σ und ρ rechnen wir damit — unter Verwendung der Darstellung (10.14) — aus:

$$\begin{aligned}U_{\sigma\rho}(2\pi) &= U_{\sigma\rho}(\pi)U_{\sigma\rho}(-\pi)^{-1} = \pi_0(\sigma(X_\pi(\rho)^{-1}))U_\sigma(\pi)U_\sigma(-\pi)^{-1}\pi_0(\sigma(X_{-\pi}(\rho))) = \\ &= e^{2\pi i h_\rho}\pi_0(\sigma(X_\pi(\rho)^{-1}X_{-\pi}(\rho))) = e^{2\pi i h_\rho}e^{2\pi i h_\sigma}\,\pi_0(\sigma(V_\rho))\,,\end{aligned} \tag{29.7}$$

wobei wir die Vakuumdarstellung vor dem Observablenanteil des Kovarianzoperators natürlich nicht vernachlässigen durften!

Theorem 29.1 *Für irreduzible Morphismen ρ_{I}, ρ_{J}, ρ_{K} von $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$ gilt, falls $N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}} \neq 0$ ist*

$$e^{2\pi i(h_{\mathrm{K}}-h_{\mathrm{I}}-h_{\mathrm{J}})} = \frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{J}}}\,. \tag{29.8}$$

Insbesondere ist

$$e^{2\pi i(h_{\mathrm{I}}+h_{\bar{\mathrm{I}}})} = \omega_{\mathrm{I}}^2\,. \tag{29.9}$$

Beweis: Um das Spektrum beider Seiten auszurechnen wenden wir $\pi_0(T_e)$ mit $e = ({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{J}})$ von rechts an. Damit erhalten wir für die linke Seite

$$U_{\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}}(2\pi)\pi_0(T_e) = \pi_0(T_e)U_{\rho_{\mathrm{K}}}(2\pi) = \pi_0(T_e)e^{2\pi i h_{\mathrm{K}}}\,,$$

mit Satz 11.9 (der auch für die Möbiusgruppe gilt). und die rechte Seite wird nach (18.20) und (28.4) zu einem Eigenwert des Monodromieoperators:

$$\pi_0\rho_{\mathrm{I}}(V_{\rho_{\mathrm{J}}}T_e) = \frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{J}}}\pi_0(T_e)\,.$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Eine Verschärfung des Zusammenhangs von Spin und Statistik zu

$$U_{\rho_{\mathrm{I}}}(2\pi) = e^{2\pi i h_{\mathrm{I}}} = \omega_{\mathrm{I}}\,, \tag{29.10}$$

ist nicht ohne weiteres möglich: Um diese zu erreichen müßte man aus den Operatoren des reduzierten Feldbündels der ACQFT punktartig lokalisierte Felder konstruieren und deren Korrelationsfunktionen untersuchen, das heißt, man müßte aus der ACQFT die zugehörige Wightman–QFT rekonstruieren. Das ist, wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel angesprochen, nicht unser Thema — die technischen Einzelheiten hierzu wurden von Martin Jörß in seiner Diplomarbeit [Jör91] und weiter in [Jör92] ausgeführt. Für das weitere akzeptieren wir hier die Gültigkeit von (29.10).

§30 Verlindes modulare Algebra

Rufen wir uns zunächst ins Gedächtnis, was wir über Darstellungen endlicher Gruppen wissen (für Details siehe [vdW67], §§104—109):

Betrachte eine endliche Gruppe G dargestellt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Die Dimension von V heißt **Grad** der Darstellung. Das Darstellungsproblem endlicher Gruppen läßt sich im wesentlichen auf das der Gruppenalgebren zurückführen, denn jede Gruppendarstellung auf V entspricht umkehrbar eindeutig einer Darstellung der Gruppenalgebra. Bezeichne π_i die irreduziblen Darstellungen von G. Die Spur eines Darstellungselements in einer solchen Darstellung

$$\mathrm{Tr}(\pi_i(a))\,, \quad a \in G\,,$$

heißt **Charakter** der i-ten Darstellung, geschrieben als

$$\chi_i(a)\,, \quad a \in G\,.$$

Charaktere sind offenbar invariant in der Äquivalenzklasse der definierenden Darstellung. Die irreduziblen Darstellungen von G sind weiterhin eins–zu–eins korreliert mit den Konjugationsklassen C_j von G. Wählt man aus jeder Konjugationsklasse C_j einen Repräsentanten g_j und betrachtet seinen Wert unter dem Charakter der i-ten Darstellung, so bildet man damit eine Matrix

$$X_{ij} \equiv \chi_i(g_j)\,, \quad g_j \in C_j\,. \tag{30.1}$$

Diese Matrix heißt **Charaktertafel** der Gruppe G. Sie erfüllt die folgenden Identitäten:

$$X_{0j} = 1\,, \quad X_{i0} = d_i\,, \tag{30.2i}$$

$$X_{ij}X_{kj} = \sum_m N_{ik}^m X_{mj}\,, \tag{30.2ii}$$

wobei π_0 die triviale Darstellung, $C_0 = \{e\}$ die triviale Konjugationsklasse und die N_{ik}^m die Multiplizitäten von π_m in $\pi_i \otimes \pi_k$ sind. Insbesondere gilt die schon vertraute Formel

$$\sum_m N_{ik}^m d_m = d_i D_k\,.$$

zu jeder Darstellung π von G existiert eine **konjugierte** (oder **kontragrediente**) Darstellung $\overline{\pi}$ auf demselben Darstellungsraum, definiert durch

$$\overline{\pi}(a) \equiv \pi(a)^{t-1}\,, \quad a \in G\,,$$

wobei $\pi(a)^t$ die transponierte Matrix zu $\pi(a)$ ist. Für irreduzibles π ist auch $\overline{\pi}$ irreduzibel und für die Charaktere zu Darstellungen i gilt

$$\chi_{\overline{i}}(a^{-1}) = \chi_i(a)\,, \quad a \in G\,.$$

Bezeichnet $|G|$ die Ordnung der Gruppe G $|C_i|$ die der Konjugationsklasse i, dann defnieren wir

$$Y_{ij} \equiv X_{ij} c_j\,, \quad c_j = \sqrt{|C_j|}\,.$$

Die Matrix Y erfüllt die **Charakterenalgebra** einer endlichen Gruppe:

$$Y_{ij} = Y_{ji} = Y^*_{i\overline{j}}\,, \tag{30.3i}$$

$$YY^\dagger = Y^\dagger Y = |G| \cdot 1\!\!1\,, \tag{30.3ii}$$

$$N^m_{ik} = \sum_i \frac{Y_{ij} Y_{kj} Y^{-1}_{jm}}{Y_{0j}} = \frac{1}{|G|} \sum_j \frac{Y_{ij} Y_{kj} Y^*_{jm}}{Y_{0j}}\,, \tag{30.3iii}$$

Genauso eng wie mit den Konjugationsklassen hängen die irreduziblen Darstellungen von G mit den irreduziblen Darstellungen des Zentrums der Gruppenalgebra zusammen: Jedem Element eines Erzeugendensystems des Zentrums der Gruppenalgebra kann eindeutig eine irreduzible Darstellung der Gruppenalgebra und damit von G selbst zugeordnet werden. Das Zentrum $\boldsymbol{Z}$ der Gruppenalgebra von G wiederum wird von den Summen k_i der Elemente der Konjugationsklassen C_i erzeugt. Die Klassensummen k_i erfüllen ebenfalls algebraische Relationen, z.B.

$$\chi(k_i) = h_i \cdot k_i\,,$$

für jeden Charakter χ, wenn h_i die Anzahl der Elemente der I-ten Klasse ist. Außerdem ist das Produkt zweier Klassensummen wieder zentral und daher gilt

$$k_i k_j = \sum_l g^l_{ij} \cdot k_l\,, \tag{30.4}$$

mit geeigneten Koeffizienten.

Rehren [Reh89a] untersuchte zuerst die Ähnlichkeiten zwischen der superselection-Struktur von AQFT's mit Zopfgruppenstatistik und Darstellungen endlicher Gruppen. Diese Überlegungnen werden wir nun nachvollziehen.

Zunächst scheint die Fusionsalgebra (28.8) eine Verallgemeinerung der oben angesprochenen Algebra der Klassensummen zu sein und man kann den Verdacht hegen, daß die Objekte aus (28.7) gute Kandidaten für eine verallgemeinerte selbstduale (vgl. (30.3ii)) Charakterentafel sind.

Alles weitere in diesem Abschnitt gesagte macht nur Sinn, falls die Zahl N der irreduziblen Sektoren der betrachteten Theorie endlich ist!

Definition 30.1 *Wir setzen*

$$\sigma \equiv \sum_{\mathrm{I}} d^2_{\mathrm{I}} \omega_{\mathrm{I}}\,, \quad \Sigma^2 \equiv \sum_{\mathrm{I}} d^2_{\mathrm{I}}\,, \tag{30.5}$$

wobei die Summe über alle Sektoren läuft. Damit definieren wir die Matrizen

$$S_{\mathrm{IJ}} \cdot 1\!\!1 \equiv \Sigma^{-1} \cdot d_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{J}} \cdot \pi_0(\rho_{\mathrm{I}}(W_{\rho_{\mathrm{J}}}))\,, \quad T \equiv \left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^{1/3} \cdot \mathrm{Diag}(\omega^{-1}_{\mathrm{I}})\,. \tag{30.6}$$

Bemerkung 30.2 *Die Matrix S erfüllt unter anderem folgende Gleichungen:*

$$S_{\mathrm{IJ}} = S_{\mathrm{JI}} = S^*_{\overline{\mathrm{I}}\mathrm{J}} = S_{\overline{\mathrm{IJ}}}\,, \tag{30.7i}$$

$$S_{0\mathrm{I}} = S_{\mathrm{I}0} = \Sigma^{-1} d_{\mathrm{I}}\,, \tag{30.7ii}$$

$$\frac{\Sigma}{d_{\mathrm{J}}} \cdot S_{\mathrm{IJ}} S_{\mathrm{KJ}} = \sum_{\mathrm{L}} N^{\mathrm{L}}_{\mathrm{IK}} \cdot S_{\mathrm{LJ}}\,. \tag{30.7iii}$$

Beweis: (30.7ii) und (30.7i) folgen nach Abgleich der Konstanten unmittelbar aus (28.7). Schreiben wir (28.8) (b) und (c) für irreduzible Sektor-Repräsentanten aus, so erhalten wir

$$d_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{K}} W_{\rho_{\mathrm{I}}} W_{\rho_{\mathrm{K}}} = \sum_{\mathrm{L}} N^{\mathrm{L}}_{\mathrm{IK}} d_{\mathrm{L}} \cdot W_{\rho_{\mathrm{L}}}\,,$$

was nach Anwendung von $\pi_0 \circ \rho_{\mathrm{J}}$ und Koeffizientenvergleich auf (30.7iii) führt. ■

Wir nennen die Spaltenvektoren $\vec{Y}_{\mathrm{J}}$ mit Komponenten

$$(\vec{Y}_{\mathrm{J}})_{\mathrm{I}} \equiv \Sigma S_{\mathrm{IJ}}\,,$$

Gewichtsvektoren, die Zeilenvektoren $\vec{\chi}_{\mathrm{I}}$ mit Komponenten

$$(\vec{\chi}_{\mathrm{I}})_{\mathrm{J}} \equiv \Sigma d_{\mathrm{J}}^{-1} S_{\mathrm{IJ}}\,,$$

die Verallgemeinerungen der Relationen (30.2i), (30.2ii) und (30.3i) von Charakterentafeln endlicher Gruppen mit der statistischen Dimension anstelle der Darstellungsdimension erfüllen, nennen wir **statistische Charaktere**. Man bemerke, daß (30.7iii) nichts anderes besagt, als daß die Vektoren $\vec{Y}_{\mathrm{J}}$ simultane Eigenvektoren der Inzidenzmatrizen N_{I} mit Eigenwerten $(\vec{\chi}_{\mathrm{I}})_{\mathrm{J}}$ sind:

$$N_{\mathrm{I}} \cdot \vec{Y}_{\mathrm{J}} = \Sigma \cdot \left(\sum_{\mathrm{L}} N^{\mathrm{L}}_{\mathrm{IK}} S_{\mathrm{LJ}} \right)_{\mathrm{K}} = \frac{\Sigma^2}{d_{\mathrm{J}}} (S_{\mathrm{IJ}} S_{\mathrm{KJ}})_{\mathrm{K}} = (\vec{\chi}_{\mathrm{I}})_{\mathrm{J}} \cdot \vec{Y}_{\mathrm{J}}\,.$$

Lemma 30.3 *In der natürlichen Metrik des $\mathbb{C}^n$ sind zwei beliebige Gewichtsvektoren $\vec{Y}_{\mathrm{L}}$, $\vec{Y}_{\mathrm{J}}$ entweder orthogonal oder parallel:*

$$\langle \vec{Y}_{\mathrm{L}}, \vec{Y}_{\mathrm{J}} \rangle\,, \quad \textit{oder} \quad d_{\mathrm{J}} \cdot \vec{Y}_{\mathrm{L}} = d_{\mathrm{L}} \cdot \vec{Y}_{\mathrm{J}}\,. \tag{30.8}$$

Beweis: Unter Verwendung von (30.7i), (30.7iii) und 18.8i) rechnen wir einfach nach:

$$d_{\mathrm{J}}^{-1} (\vec{Y}_{\mathrm{J}})_{\mathrm{I}} \langle \vec{Y}_{\mathrm{L}}, \vec{Y}_{\mathrm{J}} \rangle = \left\langle \vec{Y}_{\mathrm{L}}, \left(\sum_{\mathrm{R}} N^{\mathrm{R}}_{\mathrm{IK}} (\vec{Y}_{\mathrm{J}})_{\mathrm{R}} \right)_{\mathrm{K}} \right\rangle = \sum_{\mathrm{KR}} N^{\overline{\mathrm{K}}}_{\mathrm{I}\overline{\mathrm{R}}} (\vec{Y}_{\mathrm{L}})_{\overline{\mathrm{K}}} (\vec{Y}_{\mathrm{J}})_{\mathrm{R}} = d_{\mathrm{L}}^{-1} \sum_{\mathrm{R}} (\vec{Y}_{\mathrm{L}})_{\mathrm{I}} (\vec{Y}_{\mathrm{L}})_{\overline{\mathrm{R}}} (\vec{Y}_{\mathrm{J}})_{\mathrm{R}} =$$

$$= d_{\mathrm{L}}^{-1} (\vec{Y}_{\mathrm{L}})_{\mathrm{I}} \langle \vec{Y}_{\mathrm{L}}, \vec{Y}_{\mathrm{J}} \rangle\,,$$

woraus die Behauptung nach kürzen durch das Skalarprodukt folgt. ■

Wie können diese Analogien zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen nun benutzt werden, um die Sektoren einer AQFT mit Zopfgruppenstatistik zu klassifizieren? Die folgende Definition läßt Ansätze erkennen.

Satz und Definition 30.4 *Wir nennen Sektoren* $[\rho_{\rm I}]$ *mit Gewichtsvektoren* $\vec{Y}_{\rm I}$ *parallel zum Gewichtsvektor* $\vec{Y}_0$ *des Vakuumsektors* **ausgeartet**.

i) Für ausgeartete Sektoren $[\rho_{\rm J}]$ *gilt*

$$(\vec{Y}_{\rm J})_{\rm I} = d_{\rm I} d_{\rm J} = (\vec{Y}_{\rm I})_{\rm J} \, . \tag{30.9}$$

ii) Ein Sektor $[\rho_{\rm I}]$ *ist genau dann ausgeartet wenn der Monodromieoperator für ihn mit jedem anderen Sektor trivial ist:*

$$\varepsilon(\rho_{\rm I}, \rho_{\rm J})\varepsilon(\rho_{\rm J}, \rho_{\rm I}) = 1\!\!1 \, .$$

iii) Ist $[\rho_{\rm I}]$ *ausgeartet, so hat* $\rho_{\rm I}$ *Permutationsgruppenstatistik und es gilt* $\omega_{\rm I} = \pm 1$ *und* $d_{\rm I} \in \mathbb{N}$.

iv) Die ausgearteten Sektoren einer AQFT mit Zopfgruppenstatistik bilden eine unter Produkten und anschließender Ausreduktion sowie unter Konjugation abgeschlossene Untermenge aller Sektoren.

Beweis: Gehen wir zurück in die Definition der Gewichtsvektoren, so sehen wir, daß hier nach (28.6) und (28.4) Monodromieoperatoren auftreten, die trivial sind für $\vec{Y}_0$. Daraus folgt i) und die eine Richtung von ii). Umgekehrt muß falls $(\vec{Y}_{\rm J})_{\rm I} = d_{\rm I} d_{\rm J}$ gilt

$$\frac{\omega_{\rm K}}{\omega_{\rm I}\omega_{\rm J}} = 1 \, ,$$

sein, wann immer $N_{\rm IJ}^{\rm K} \neq 0$ ist, denn dann greift Satz 18.8iii):

$$\sum_{\rm K} N_{\rm IJ}^{\rm K} d_{\rm K} = d_{\rm I} d_{\rm J} \, ,$$

und liefert das gewünschte, weil die Größen $\omega_{\rm K}/\omega_{\rm I}\omega_{\rm J}$ nach Lemma 18.20 das Spektrum des Monodromieoperators ausschöpfen. iii) folgt aus der Trivialität der Monodromie $\varepsilon_{\rho_{\rm I}}\varepsilon^*_{\rho_{\rm I}} = 1\!\!1$ und den Quantisierungsbedingungen für den statistischen Parameter aus Satz 9.4ii). iii): Wir rechnen zunächst:

$$\begin{aligned} \langle \vec{Y}_{\rm J}, \vec{Y}_{\rm K} \rangle &= \Sigma^2 \cdot \sum_{\rm I} S_{\rm I\bar{J}} S_{\rm IK} = \Sigma \cdot \sum_{\rm IM} N_{\rm K\bar{J}}^{\rm M} d_{\rm I} S_{\rm MI} = \Sigma^2 \cdot \sum_{\rm IM} N_{\rm K\overline{M}}^{\rm J} S_{\rm \bar{I}0} S_{\rm IM} = \\ &= \sum_{\rm M} N_{\rm KM}^{\rm J} \langle \vec{Y}_0, \vec{Y}_{\rm M} \rangle \, , \end{aligned} \tag{30.10}$$

unter Ausnutzung der Identitäten aus Satz 18.8 und (30.7i—iii). Das zeigt folgendes: Zwei Sektoren $[\rho_{\rm J}]$, $[\rho_{\rm K}]$ haben genau dann parallele Gewichtsvektoren $d_{\rm K}\vec{Y}_{\rm J} = d_{\rm J}\vec{Y}_{\rm K}$, wenn ein ausgearteter Sektor $[\rho_{\rm M}]$ mit $N_{\rm KM}^{\rm J} \neq 0$ existiert. Das heißt alle in der Ausreduktion des Produkts zweier ausgearteter Morphismen auftretenden Sektoren sind wieder ausgeartet. ■

Die ausgearteten Sektoren bilden also ein abgeschlossenes „Nest“ von Permutationsgruppenstatistik innerhalb der superselection-Struktur einer AQFT mit Zopfgruppenstatistik. Kommen wir nun zum nichtausgearteten Fall, d.h. dem Fall, in dem $[\iota]$ der einzige Sektor ist, der triviale Monodromie mit allen anderen hat. Man findet das folgende bemerkenswerte Resultat:

Theorem 30.5 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
i) $[\iota]$ *ist der einzige ausgeartete Sektor.*
ii) Die Matrix S *ist invertierbar.*
iii) Es gilt $|\sigma|^2 = \Sigma^2$*, d.h.*

$$\left|\sum_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{I}}^2 \omega_{\mathrm{I}}\right|^2 = \sum_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{I}}^2 \,, \tag{30.11}$$

und die Matrizen S *und* T *erfüllen* **Verlindes modulare Algebra***:*

$$SS^\dagger = TT^\dagger = \mathbb{1}_N \,, \tag{30.12i}$$

$$TSTST = S \,, \tag{30.12ii}$$

$$S^2 = C \,, \quad TC = CT = T \,, \tag{30.12iii}$$

mit der **Ladungskonjugationsmatrix** $C_{\mathrm{IJ}} \equiv \delta_{\mathrm{I\overline{J}}}$ *(*N *sei die Zahl der irreduziblen Sektoren). Weiterhin gilt*

$$N_{\mathrm{IK}}^{\mathrm{M}} = \sum_{\mathrm{J}} \frac{S_{\mathrm{IJ}} S_{\mathrm{KJ}} S_{\mathrm{MJ}}^*}{S_{0\mathrm{J}}} \tag{30.12iv}$$

Beweis: iii) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ i) ist offensichtlich. Setzen wir i) voraus. Dann rechnen wir mit (30.10) und Lemma 30.3 nach:

$$(SS^\dagger)_{\mathrm{IK}} = \sum_{\mathrm{J}} S_{\mathrm{I\overline{J}}} S_{\mathrm{JK}} = \frac{1}{\Sigma^2}\langle \vec{Y}_{\mathrm{I}}, \vec{Y}_{\mathrm{K}}\rangle = \frac{1}{\Sigma^2}\sum_{\mathrm{M}} N_{\mathrm{KM}}^{\mathrm{I}} \underbrace{\langle \vec{Y}_0, \vec{Y}_{\mathrm{M}}\rangle}_{= \delta_{0\mathrm{M}} \cdot \Sigma^2} = N_{\mathrm{K}0}^{\mathrm{I}} = \delta_{\mathrm{IK}}$$

womit (30.12i) gezeigt ist. Um die Übereinstimmung der Konstanten Σ mit $|\sigma|$ zu zeigen, bilden wir

$$\sum_{\mathrm{J}} \Sigma\, S_{\mathrm{IJ}} d_{\mathrm{J}} \omega_{\mathrm{J}} = \sum_{\mathrm{KJ}} N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}} d_{\mathrm{J}} d_{\mathrm{K}} \frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{I}}} = \sum_{\mathrm{K}} \left(\sum_{\mathrm{J}} N_{\mathrm{I\overline{K}}}^{\mathrm{\overline{J}}} d_{\mathrm{J}}\right) \frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{I}}} = \left(\sum_{\mathrm{K}} d_{\mathrm{K}}^2 \omega_{\mathrm{K}}\right) \frac{d_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{I}}} = \sigma \frac{d_{\mathrm{I}}}{\omega_{\mathrm{I}}} \,, \tag{30.13}$$

mit der Definition von S_{IJ}, (28.7) und Satz 18.8. Kontrahiert man (30.7iii) mit $d_{\mathrm{J}}\omega_{\mathrm{J}}$, so erhält man

$$\sum_{\mathrm{J}} \Sigma\, \omega_{\mathrm{J}} S_{\mathrm{IJ}} S_{\mathrm{KJ}} = \sum_{\mathrm{L}} N_{\mathrm{LI}}^{\mathrm{K}} \left(\sum_{\mathrm{J}} S_{\mathrm{LJ}} d_{\mathrm{J}} \omega_{\mathrm{J}}\right) = \sum_{\mathrm{L}} \frac{\sigma}{\Sigma} \frac{d_{\mathrm{L}}}{\omega_{\mathrm{L}}} N_{\mathrm{IK}}^{\mathrm{L}} = \frac{1}{\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{K}}} \sigma S_{\mathrm{IK}}^* \,,$$

unter Verwendung von (30.13), Satz 18.8iii) und nach Einsetzen in die Definition der S_{IJ} und Ausnutzen von (28.7). Das heißt

$$\frac{\Sigma}{\sigma} \sum_{\mathrm{J}} \omega_{\mathrm{I}} S_{\mathrm{IJ}} \omega_{\mathrm{J}} S_{\mathrm{JK}} \omega_{\mathrm{K}} = S_{\mathrm{IK}}^* \,,$$

was nach komplexer Konjugation (30.12ii) ergibt. (30.12iii) ist nach den Rechnungen zum Beweis von (30.12i) klar (ersetze $\vec{Y}_{\mathrm{K}}$ durch $\vec{Y}_{\overline{\mathrm{K}}}$). Die Inversionsformel (30.12iv) ergibt sich einfach, wenn man (30.7iii) mit $S^\dagger$ überschiebt und (30.12i) ausnutzt. ■

Verlindes Algebra wurde zuerst in rationalen Modellen der konformen Quantenfeldtheorie entdeckt [Ver88]. Wir haben dieses Resultat hier aber ohne Verwendung der konformen Symmetrie abgeleitet[4)]. Ihr auftreten ist also ein wesentliches Merkmal der Zopfgruppenstatistik und der darunterliegenden Quantengruppen-Symmetrie der Theorie (vgl. [Här93]).

[4)] Auch daß die Vakuumdarstellung nicht treu ist, spielt hier keine Rolle, denn die Einträge von S sind mithilfe von Operatoren definiert, die von vornherein schon unter π_0 stehen.

§31 Die Struktur des universellen reduzierten Feldbündels

Aufbauend auf der universellen Observablenalgebra $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$ kann man das zugehörige reduzierte Feldbündel $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\text{univ}}$ auf der S^1 zunächst einfach wie in §21 einführen. Dabei wählen wir wie schon in §27 sämtliche Repräsentantenmorphismen in einem einzigen eigentlichen Intervall $\mathcal{I}$ lokalisiert, so daß die Basen T_e der Fusionsräume *lokale* Intertwiner aus $\mathfrak{A}(\mathcal{I})$ sind.

Wenn wir auf $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\text{univ}}$ den üblichen Lokalisierungsbegriff einführen — das heißt, wir bezeichnen $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\text{univ}}$ als in $\mathcal{J}$ lokalisiert, wenn es mit jeder Observable (ι, A), $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{J}')$ kommutiert — dann wird uns klar, daß dies nicht mehr äquivalent ist zur eindeutigen Existenz eines unitären Intertwiners der die Ladung des Feldes und seinen Observablenanteil nach $\mathcal{J}$ transportiert (vgl. Def.21.5, Satz 12.13). Dies liegt natürlich an der Existenz *globaler* Intertwiner, die dazu führen würde, daß ein lokalisiertes Feld sich auf mehrere verschiedene Weisen schreiben ließe. Das Fehlen einer globalen „rechts/links"–Unterscheidung zwingt uns außerdem dazu, die Aussagen zur Austauschalgebra 21.12 auf Widerspruchsfreiheit zu prüfen — schlimmstenfalls könnten die Zopfmatrizen ja nun nicht mehr wohldefiniert sein.

In der Tat führen uns die Diskussionen der letzten Abschnitte dazu zu vermuten, daß der richtige Lokalisierungsbegriff für Felder der ACQFT auf der S^1 an den speziellen Ladungstransporter U gekoppelt sein sollte, der die Lokalisierung induziert. Das wird dazu führen, daß die Felder nicht in Intervallen der S^1 sondern in einem Überlagerungsraum lokalisiert sind, wie wir nun sehen wollen.

Nehmen wir uns nun wieder einen Referenzpunkt $\xi \in S^1$ her und befassen uns mit der zugehörigen Unteralgebra $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\text{univ},\xi}$ von $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\text{univ}}$. In jeder solchen Unteralgebra ist die konforme Kovarianz für eine Umgebung der Einheit in $\widetilde{\mathrm{M}}$ gemäß (21.15) defniert — solange die transformierten Lokalisierungsintervalle nicht über ξ wandern. Studieren wir wieder die starren Rotationen der S^1, wie schon in §29 (unter Beibehaltung der dortigen Notationen). Die zweifache Anwendung einer Rotation um π auf ein Feld $\boldsymbol{e} = (e, A) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\text{univ},\xi}$, $c(e) = \rho$ ergibt dann

$$\alpha_{2\pi}\boldsymbol{e} = (e, X_{2\pi}(\rho)^{-1}A)\,, \quad \text{mit} \quad X_{2\pi}(\rho) = \alpha_\pi(X_\pi(\rho))X_\pi(\rho)\,. \tag{31.1}$$

Im allgemeinen ist das Ergebnis dieser Operation nicht in $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\text{univ},\xi}$, denn $X_{2\pi}(\rho)$ ist ein globales Element von $\mathfrak{A}_{\text{univ}}$. Wir wissen aber aus §29, daß

$$X_\pi(\rho) = V_+\,, \quad e^{-2\pi i h_\rho}\alpha_\pi(X_\pi(\rho)) = V_-^*\,,$$

woraus wir unter Zuhilfenahme des starken Spin-Statistik-Theorems (29.10)

$$X_{2\pi}(\rho) = \omega_\rho \cdot V_\rho^*\,, \tag{31.2}$$

schließen. Damit haben wir:

Lemma 31.1 *Für* $e = \left({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{J}}{}_{\rho}\right)$ *ist*

$$\alpha_{2\pi}(e, A) = \frac{\omega_{\mathrm{J}}}{\omega_{\mathrm{I}}} \cdot (e, A)\,. \tag{31.3}$$

Beweis: In Anwendung auf ein $(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{red}}$ rechnen wir aus (die Vakuumdarstellung ist immer zu berücksichtigen):

$$\begin{aligned}\alpha_{2\pi}(e, A)(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi) &= (e, \omega_\rho \cdot V_\rho^* A)(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi) = (\rho_{\mathrm{J}}, \pi_0(T_e^* \omega_\rho \rho_{\mathrm{I}}(V_\rho A))\Psi) = \\ &= \omega_\rho \cdot (\rho_{\mathrm{J}}, \pi_0(T_e^* \varepsilon(\rho, \rho_{\mathrm{I}})\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho)\rho_{\mathrm{I}}(A))\Psi) = \\ &= \frac{\omega_{\mathrm{J}}}{\omega_{\mathrm{I}}} \cdot (\rho_{\mathrm{J}}, \pi_0(T_e^* \rho_{\mathrm{I}}(A)\Psi) = \frac{\omega_{\mathrm{J}}}{\omega_{\mathrm{I}}} \cdot (e, A)(\rho_{\mathrm{I}}, \Psi)\,,\end{aligned}$$

da T_e den Monodromieoperator diagonalisiert. ■

Die Felder der ACQFT zeigen damit genau jene **Periodizität**, die man bei konformen Austauschfeldern gefunden hat — vergleiche hierzu [RS89].

Damit können wir nun zeigen, daß die Austauschalgebra (21.12) kompatibel mit der vollen Möbius–Kovarianz des reduzierten Feldbündels auf der S^1 ist, daß also die „rechts/links“-Zweideutigkeit keinen Schaden anrichtet.

Satz 31.2 *Genau dann ist $\mathcal{F}_{\text{univ}}$ kovariant unter ganz $\widetilde{\mathrm{M}}$, wenn die Kompatibilitätsbedingung (19.11) für die Zopfmatrizen erfüllt ist.*

Beweis: Benutzen wir wieder die Anordnung aus Fig.28.1. Seien $\boldsymbol{e}_1 = (e_1, A_1) \in \mathcal{F}_{\text{univ},\zeta}(\mathcal{I})$, $\boldsymbol{e}_2 = (e_2, A_2) \in \mathcal{F}_{\text{univ},\zeta}(\pi\mathcal{I})$, mit $s(e_2) = \mathrm{I}$, $r(e_2) = s(e_1) = \mathrm{J}$, $r(e_1) = \mathrm{K}$. Bezüglich ξ ist dann $\boldsymbol{e}_1 \in \mathcal{F}_{\text{univ},\xi}(\mathcal{I})$ und $\boldsymbol{e}_2$ läßt sich eindeutig in $\mathcal{F}_{\text{univ},\xi}(\pi\mathcal{I})$ darstellen durch $\boldsymbol{e}_2 = \alpha_{2\pi}(\boldsymbol{g}_2)$, mit $\boldsymbol{g}_2 = (e_2, G_2) \in \mathcal{F}_{\text{univ},\xi}(\pi\mathcal{I})$. In $\mathcal{F}_{\text{univ},\zeta}$ liegt dann $\pi\mathcal{I}$ rechts von $\mathcal{I}$, das heißt, es gilt

$$(e_1, A_1)(e_2, A_2) = \sum_{e_1' \circ e_2'} B^{(+)}_{e_2 \circ e_1, e_1' \circ e_2'} (e_2', A_2')(e_1', A_1'),$$

und umgekehrt ist

$$(e_1, G_1)\,(e_2, A_2) = \sum_{e_1' \circ e_2'} B^{(-)}_{e_2 \circ e_1, e_1' \circ e_2'} (e_2', G_2')(e_1', A_1'),$$

in $\mathcal{F}_{\text{univ},\xi}$. Nun ist $(e_1, G_1) = \alpha_{-2\pi}(e_1, A_1) = \frac{\omega_{\mathrm{K}}}{\omega_{\mathrm{J}}}$. Wählt man aus der Summe einen bestimmten Term mit $r(e_1') = s(e_2') = \mathrm{L}$, so ist auch $(e_2, G_2') = \alpha_{-2\pi}(e_2', A_2') = \frac{\omega_{\mathrm{L}}}{\omega_{\mathrm{I}}}$. Ein Vergleich ergibt, daß die beiden Ausdrücke nur übereinstimmen können, wenn (19.11) gilt. ■

Man kann also (19.11) als Konsistenzbedingung, die erst die volle Möbiuskovarianz ermöglicht auffassen. In der Tat war es diese Art Argument, die ursprünglich in [RS89] zu (19.11) als Einschränkung für die R–Matrizen konformer Austauschalgebren führte.

Die Periodizität (31.3) macht klar, daß die Felder einer ACQFT auf S^1 nicht auf der S^1 selbst sondern auf ihrem Überlagerungsraum $\mathbb{R}$ lokalisiert sind. Wir wählen zunächst ein **Basisintervall** $\mathcal{J}_0 \subset \mathbb{R}$ (mit Ausdehnung kleiner 2π) aus, das unter der Überlagerungsabbildung auf das Intervall $\mathcal{I}$ projiziert wird, in dem wir alle Repräsentantenmorphismen lokalisiert geählt hatten. Damit definieren wir:

Definition 31.3 *Sei $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (mit Ausdehnung $< 2\pi$) der universellen Überlagerung $\mathbb{R}$ von S^1. Für einen Repräsentantenmorphismus ρ und eine Observable $A \in \mathfrak{A}_{\text{univ}}$ sagen wir, das Paar $\{\rho, A\}$ sei in $\mathcal{J}$* **lokalisiert**, *wenn es einen lokalen Operator $C \in \mathfrak{A}(\mathcal{I})$ gibt, so daß alle Felder (e, A) mit Ladung ρ durch Transformation mit $\alpha_{\tilde{g}}$, $\tilde{g}(\mathcal{J}_0) = \mathcal{J}$ aus $(e, C) \in \mathcal{F}_{\text{univ}}(\mathcal{I})$ entstehen.*

Dieser Lokalisierungsbegriff nimmt nicht auf Quelle und Ziel der einzelnen Felder Bezug, für die die Periodizität (31.3) gilt, sondern auf Familien von Feldern mit gleicher Ladung und Observablenanteil. Er ist natürlicherweise kompatibel mit Definition 21.5 dank der Einbettung (21.5) (Observablen entsprechen ja Paaren (ι, A)). Man sieht, daß wir damit im wesentlichen wieder beim ursprünglichen Feldbündel aus Def.12.2 angekommen sind.

Die Austauschalgebra (21.12) gilt dann in folgender globaler Verallgemeinerung:

Satz 31.4 *Seien* (ρ_1, A_1), (ρ_2, A_2) *lokalisiert in Intervallen* $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2 \subset \mathbb{R}$, *die unter der Überlagerungsabbildung auf disjunkte Intervalle auf der* S^1 *abgebildet werden. Bestimme ein* $N \in \mathbb{N}$, *so daß* $\mathcal{J}_1 + 2\pi N < \mathcal{J}_2 < \mathcal{J}_1 + 2\pi(N+1)$ *auf* $\mathbb{R}$ *gilt. Dann gilt für Felder* e_1, e_2, *die unter die Lokalisierungsbedingung von Def.31.3 fallen, die Austauschalgebra*

$$(e_2, A_2)(e_1, A_1) = \sum_{e_2' \circ e_1'} B^{(N)}_{e_1 \circ e_2, e_2' \circ e_1'} (e_1', A_1)(e_2', A_2), \tag{31.4}$$

wobei

$$B^{(N)}_{e_1 \circ e_2, e_2' \circ e_1'} \equiv \pi_0 \left(T^*_{e_2} T^*_{e_1} \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon_N(\rho_2, \rho_1)) T_{f_2} T_{f_1} \right), \tag{31.5}$$

die Matrixelemente in der Vakuumdarstellung der verallgemeinerten statistischen Operatoren

$$\varepsilon_N(\rho_2, \rho_1) \equiv \rho_1(X_{2\pi}(\rho_2)^{-N}) \varepsilon(\rho_2, \rho_1) X_{2\pi}(\rho_2)^N \in (\rho_1\rho_2|\rho_2\rho_1), \tag{31.6}$$

sind. Für diese Matrixelemente gilt die Verallgemeinerung von Satz 19.11 (Bezeichnungen wie dort):

$$B^{(N)}_{e_1 \circ e_2, e_2' \circ e_1'} = \left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{J}}}{\omega_{\mathrm{K}}\omega_{\mathrm{L}}} \right)^N \cdot B^{(+)}_{e_1 \circ e_2, e_2' \circ e_1'}. \tag{31.7}$$

Beweis: Offensichtlich korrespondieren die Fälle $N = 0$, $N = -1$ mit den gewöhnlichen Zopfmatrizen $B^{(+)}$ und $B^{(-)}$. In jedem anderen Fall ist ε_N ein globaler Operator, d.h. der in (31.5) enthaltene Selbstintertwiner ist nur unter der Vakuumdarstellung ein Skalar. Dann transportiert $X_{2\pi}(\rho_2)^N$ zunächst das Feld e_2, daß nach Def.31.3 dargestellt wird durch $\alpha_{2\pi N}(e_2, C_2)$ gemäß (31.1) in die Überlagerungskomponente von $\mathcal{J}_1$. Dort wirkt dann die normale Austasuchslgebra (vgl. (21.13), (21.14)) und $\rho_1(X_{2\pi}(\rho_1)^{-N})$ besorgt den Rücktransport in die Ausgangsposition. ■

Nach Definition 31.3 kann man ein Paar (ρ, A) in verschiedenen Intervallen lokalisieren, die auf dasselbe Intervall der S^1 projiziert werden, wenn eine Potenz von $X_{2\pi}(\rho)$ trivial ist. Denn nach (31.3) wird das Spektrum von $X_{2\pi}(\rho)$ in der Darstellung $\pi_0 \circ \rho_{\mathrm{I}}$ ausgeschöpft durch $\omega_{\mathrm{J}}/\omega_{\mathrm{I}}$ für Untermorphismen ρ_{J} von $\rho_{\mathrm{I}}\rho$. Das heißt, wenn $(\omega_{\mathrm{J}}/\omega_{\mathrm{I}})^n = 1$ ist für geeignetes n und alle Morphismen, zwischen denen Felder mit Ladung ρ interpolieren, dann leben solche Felder auf einer n-fachen Überlagerung der S^1 statt auf $\mathbb{R}$. Insbesondere lassen sich wie wir schon wissen Observablen auf dem Einheitskreis selbst lokalisieren, denn $X_{2\pi}(\iota) = \mathbb{1}$.

Das in (31.5) definierte Matrixelement von $\pi_0(\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon_N))$ entspricht, wenn man (28.4) und (31.2) berücksichtigt einem komplizierten Zopf, nämlich

$$\begin{aligned}(\varepsilon(\rho_2, \rho_{\mathrm{I}}\rho_1)\, \varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}\rho_1, \rho_2))^N \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_2, \rho_1))(\varepsilon(\rho_2, \rho_{\mathrm{I}})\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_2))^{(-N)} = \\ = (\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_2, \rho_1))\varepsilon(\rho_2, \rho_{\mathrm{I}})\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_2)\rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_1, \rho_2)))^N \rho_{\mathrm{I}}(\varepsilon(\rho_2, \rho_1))(\varepsilon(\rho_2, \rho_{\mathrm{I}})\varepsilon(\rho_{\mathrm{I}}, \rho_2))^{(-N)},\end{aligned}$$

entspricht, was man, wenn man einen Generator σ_0 für die Vertauschung von erstem Strang und äußerstem Quellenmorphismus einführt, als

$$(\sigma_1 \sigma_0^2 \sigma_1)^N \sigma_1 (\sigma_0^2)^N, \tag{31.8}$$

schreiben kann.

Der geometrische Grund für das Auftreten dieses Zopfes ist, daß die Generatoren $\sigma_i \equiv \rho^{i-1}(\varepsilon_\rho)$ und $\tau \equiv V_\rho = \omega_\rho^{-1} \cdot X_{2\pi}(\rho)^*$ in der Tat eine Darstellung der *Zopfgruppe des Zylinders* bilden — was man für eine Theorie über S^1 auch erwarten würde:

Lemma 31.5 *Die Generatoren* σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$ *und* $\zeta \equiv \sigma_{n-1} \ldots \sigma_1 \tau$ *erfüllen die Relationen der* **Zopfgruppe auf dem Zylinder**, *d.h. die der Artinschen Zopfgruppe und zusätzlich*

$$\begin{aligned} \sigma_i \zeta &= \zeta \sigma_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-2 \quad \textit{und} \\ \zeta^2 \sigma_1 &= \sigma_{n-1} \zeta^2 . \end{aligned} \tag{31.9}$$

Beweis: Beachten wir, daß V_ρ mit $\rho(\mathfrak{A}_{\text{univ}})$ kommutiert und (28.3), so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \tau \sigma_i &= \sigma_i \tau, \ i = 2, \ldots, n-1 \quad \text{und} \\ \tau \sigma_1 \tau \sigma_1 &= \sigma_1 \tau \sigma_1 \tau, \end{aligned}$$

woraus mit der Definition von ζ die Relationen (31.9) werden. ■

§32 Algebraische konforme Kovarianz

In §25 haben wir gesehen, daß zwischen speziellen algebraischen Eigenschaften der lokalen Algebren einer AQFT (modularer Operator) und den Kovarianzoperatoren der Theorie ein gewisser Zusammenhang besteht. Aus diesem Ansatz stammt die Idee, eine kovariante AQFT aus nur wenigen vorgegebenen von Neumann Algebren und ihren modularen Strukturen zu rekonstruieren. Das wurde zuerst in [BW75], [BW76] untersucht. für den Modellfall einer zweidimesionalen Theorie und Poincaré-Kovarianz hat Borchers dies in [Bor92] ausgearbeitet. Wir folgen zunächst dieser Darstellung, um den Grundgedanken zu erfassen.

Als erstes möchte man wissen, wie sich die modularen Strukturen relativ zu einer vorgegebenen „Translations-Kovarianz“ verhalten, denn daran kann man diese Strukturen selbst als geometrische Operationen erkennen. Das zentrale Ergebnis hierzu ist:

Theorem 32.1 *Sei* $\mathfrak{M}$ *eine von Neumann Algebra auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$ *und sei* $\Omega \in \mathfrak{H}$ *zyklisch und separierend für* $\mathfrak{M}$. *Seien* Δ *und* J *der zugehörige modulare Operator und die modulare Konjugation. Sei weiter* $U(a)$, $a \in \mathbb{R}$ *eine einparametrige Gruppe unitärer Operatoren auf* $\mathfrak{H}$ *mit positivem Generator, die* Ω *invariant läßt. Gelte weiter*

$$U(a) \mathfrak{M} U(a)^{-1} \subset \mathfrak{M}, \tag{32.1}$$

für a) $a \geq 0$, *bzw. b)* $a \leq 0$. *Dann gilt für* $(t, a) \in \mathbb{R}^2$ *:*

i)

$$\Delta^{it} U(a) \Delta^{-it} = U(e^{s 2\pi t} a), \tag{32.2}$$

mit $s = -1$ *im Fall a) und* $s = -1$ *im Fall b). Weiter gilt*

ii)

$$J U(a) J = U(-a). \tag{32.3}$$

Teil ii) dieses Satzes ist die schon aus dem CPT-Theorem bekannte Identifikation der Raum-Zeit-Reflektion mit J. Teil i) ist neu: er sagt uns, daß die modulare Automorphismengruppe (siehe Def.A.23) Translationen auf gewisse Weise „streckt“. Daraus kann man sich nun Lorentztransformationen bauen!

Sei $\mathfrak{M}$ eine von Neumann Algebra wie in obigem Satz und diesmal eine Darstellung $U(a)$, $a \in \mathbb{R}^2$ der Translationsgruppe des $\mathbb{R}^2$ auf $\mathfrak{H}$ gegeben. Wir nehmen von hier ab an:

a) $U(a)\Omega = \Omega$.

b) Das Spektrum von $U(a)$ ist ganz im Vorwärtslichtkegel

$$V^+ \equiv \{a \in \mathbb{R}^2 \mid a^0 \geq |a^1|\},$$

enthalten.

c) Sei W die Menge

$$W \equiv \{a \in \mathbb{R}^2 \mid a^1 \geq |a^0|\}.$$

Dann soll gelten:

$$U(a)\mathfrak{M}U(a)^{-1} \subset \mathfrak{M}, \quad \forall a \in W.$$

Führt man Lichtkegelkoordinaten

$$a^\pm \equiv \frac{a^0 \pm a^1}{2},$$

ein, so folgt aus der Spektrumsbedingung für U, daß die $U(a^\pm)$ positives Spektrum haben. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} U(a^+)\mathfrak{M}U(a^+)^{-1} \subset \mathfrak{M}, \forall a^+ \geq 0, \quad \text{und} \\ U(a^-)\mathfrak{M}U(a^-)^{-1} \subset \mathfrak{M}, \forall a^- \leq 0. \end{aligned} \tag{32.4}$$

Damit können wir Theorem 32.1 anwenden:

Theorem 32.2 *Mit obigen Annahmen a)—c) und mit*

$$\Lambda(t) \equiv \begin{pmatrix} \cosh 2\pi t & -\sinh 2\pi t \\ -\sinh 2\pi t & \cosh 2\pi t \end{pmatrix}, \tag{32.5}$$

setze

$$U(\Lambda(t)) \equiv \Delta^{it}. \tag{32.6}$$

Dann induziert $\{U(\Lambda), U(a)\}$ eine Darstellung der zweidimensionalen Poincarégruppe , die die Spektrumsbedingung erfüllt und den Vakuumvektor invariant läßt. Außerdem gilt

$$JU(a)J = U(-a). \tag{32.7}$$

Beweis: Aus Theorem 32.1 wissen wir, daß $\Delta^{it}U(a^+)\Delta^{-it} = U(e^{-2\pi t}a^+)$, und $\Delta^{it}U(a^-)\Delta^{-it} = U(e^{2\pi t}a^-)$. Dies zusammen mit der Definition der Lichtkegelkoordinaten ergibt

$$\Delta^{it}U(a)\Delta^{-it} = U(\Lambda(t)a),$$

mit der Matrix Λ aus (32.5) angewandt auf den Zweiervektor a. Das heißt $U(\Lambda)$ induziert die korrekten äußeren Automorphismen der Translationsgruppe, wie es die Lorentzgruppe tun sollte, also geben beide zusammen eine Darstellung der Poincarégruppe . Die übrigen Aussagen sind aus Thm.32.1 übernommen. ∎

Sich ein lokales Netz von Algebren zu modellieren, ist nun ein leichtes. Man denke sich zunächst die Algebra $\mathfrak{M}$ dem **rechten Keil** $W_R \equiv W$ zugeordnet. Als Entsprechungen für den **linken Keil** W_L wählen wir sinnivollerweise den Kommutanten $\mathfrak{M}'$. Das sichert später Haag-Dualität, genau wie in §25, und ist in unserem Fall auch natürlich, denn die modulare

Konjugation steht uns generisch zur Verfügung, induziert die Raum-Zeit-Spiegelung und mit dem Tomita-Takesaki-Theorem gilt $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$. Aus den Keilen und ihren Translierten baut man sich durch Überschneidung **zweidimensionale Doppelkegel**: Seien $a,\ b \in \mathbb{R}^2$ und b liege **raumartig rechts** von a, d.h. $b \in W_R + a$. Dann setzeen wir

$$D_{a,b} \equiv \{a + W_R\} \cap \{b + W_L\}. \tag{32.8}$$

Definiert man die Algebren translierter Keile durch

$$\mathfrak{M}_a \equiv U(a)\mathfrak{M}U(a)^{-1}, \quad \mathfrak{M}'_a \equiv U(a)\mathfrak{M}'U(a)^{-1}, \tag{32.9}$$

und damit die eines Doppelkegels durch

$$\mathfrak{N}(D_{a,b}) \equiv \mathfrak{M}_a \cap \mathfrak{M}'_b, \tag{32.10}$$

so hat man schon aus $\mathfrak{M}$ eine zweidimensionale Poincaré-kovariante AQFT gewonnen:

Theorem 32.3 *Unter den Voraussetzungen a)—c) und mit Definition (32.10) bildet das System $\{\mathfrak{N}(D), \mathfrak{N}, U(\Lambda, a), \}$ eine Poincaré-kovariante AQFT auf dem $\mathbb{R}^2$ ($\mathfrak{N}$ sei die quasilokale Algebra). Die modulare Konjugation J von $\mathfrak{M}$ ist der CPT-Operator dieses lokalen Netzes.*

Beweis: Zunächst gelten für die Keilalgebren die Kovarianz– und Lokalitätsbedingungen:

i) $(\mathfrak{M}_a)' = \mathfrak{M}'_a$,

ii) $U(\Lambda)\mathfrak{M}_a U(\Lambda)^{-1} = \mathfrak{M}_{\Lambda a}$ und $U(\Lambda)\mathfrak{M}'_a U(\Lambda)^{-1} = \mathfrak{M}'_{\Lambda a}$,

iii) $J\mathfrak{M}_a J = \mathfrak{M}'_{-a}$ und $J\mathfrak{M}'_a J = \mathfrak{M}_{-a}$.

Die erste dieser Aussagen ist trivial. Da $U(\Lambda)$ bis auf eine Umskalierung der Parameter identisch ist mit der modularen Gruppe von $\mathfrak{M}$ gilt: $U(\Lambda)\mathfrak{M}U(\Lambda)^{-1} = \mathfrak{M}$ und $U(\Lambda)\mathfrak{M}'U(\Lambda)^{-1} = \mathfrak{M}'$ (vgl. Thm.A.22). Damit gilt nach Definition (32.9) und mit Theorem 32.2

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\mathfrak{M}_a U(\Lambda)^{-1} &= U(\Lambda)U(a)\mathfrak{M}U(a)^{-1}U(\Lambda)^{-1} = U(\Lambda a)U(\Lambda)\mathfrak{M}U(\Lambda)^{-1}U(\Lambda a)^{-1} = \\ &= U(\Lambda a)\mathfrak{M}U(\Lambda a)^{-1} = \mathfrak{M}_{\Lambda a}. \end{aligned}$$

Die Argumente für $\mathfrak{M}'_a$ und iii) sind ganz analog. Das alles zeigt die Kovarianz des Netzes der Keilalgebren und damit auch der $\mathfrak{N}_{a,b}$ (als Schnitte). Weiterhin schließt man aus iii) sofort

$$J\mathfrak{N}(D_{a,b})J = \mathfrak{N}(D_{-a,-b}),$$

d.h. J induziert die Raum-Zeit-Reflektion des Netzes. Bleibt Lokalität zu zeigen. Nehmen wir an, $D_{c,d}$ liege rechts von $D_{a,b}$, dann ist $\mathfrak{N}(D_{c,d}) \subset \mathfrak{M}_c$ und $\mathfrak{N}(D_{a,b}) \subset \mathfrak{M}'_b$. Da c rechts von b liegt haben wir $\mathfrak{M}_c \subset \mathfrak{M}_b$ und die Doppelkegelalgebren kommutieren. ■

Borchers zeigte weiterhin, das dieses Netz Haag-Dualität erfült und hatte so beinahe eine generisch algebraische Beschreibung der geometrischen Kovarianz einer AQFT erreicht.

Der Nachteil dieser Konstruktion ist, daß man sich eine Translations-Kovarianz vorgeben mußte, um die Lorentztransformationen identifizieren zu können. Um Translationen selbst aus modularen Strukturen gewinnen zu können, muß man wohl *mehr als eine* von Neumann Algebra betrachten!

Als handliches Modell bieten sich hier konforme Theorien auf S^1 an. In jüngerer Zeit hat Hans-Werner Wiesbrock dies in einer Serie von Arbeiten [Wie93b], [Wie93a] und [Wie94] untersucht und es geschafft, eine vollständige ACQFT aus nur zwei richtig gewählten von Neumann Algebren zu rekonstruieren. Wir folgen nun zuletzt diesen Ideen.

Die Grundlage ist dieser Begriff:

Definition 32.4 *Sei* $\mathfrak{M}$ *eine von Neumann Algebra auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$ *und sei* $\Omega \in \mathfrak{H}$ *zyklisch und separierend für* $\mathfrak{M}$. *Sei weiter* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. *Seien* $\Delta_{\mathfrak{M}}$, $\Delta_{\mathfrak{N}}$ *und* $J_{\mathfrak{M}}$, $J_{\mathfrak{N}}$ *die zugehörigen modularen Operatoren und Konjugationen. Die Inklusion* $\{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ *heißt* **−halbseitig modular**, *wenn*

$$\Delta_{\mathfrak{M}}^{-it} \mathfrak{N} \Delta_{\mathfrak{M}}^{it} \subset \mathfrak{M}\,, \quad \textit{für}\; t \geq 0\,. \tag{32.11}$$

Falls dies für $t \leq 0$ *gilt, nennen wir sie* **+halbseitig modular**. *Abkürzend schreiben wir* $\mp$*hsm.*

Für solche Inklusionen erreichte Wiesbrock in [Wie93b] eine wesentliche Erweiterung von Thm.32.1, die die Konstruktion eines Translationsoperators einschließt:

Theorem 32.5 *Sei* $\{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ $\mp$*hsm. Dann gilt: Der Operator*

$$\frac{1}{2\pi}\left(\ln(\Delta_{\mathfrak{N}}) - \ln(\Delta_{\mathfrak{M}})\right) \geq 0\,, \tag{32.12}$$

ist wesentlich selbstadjungiert (d.h. sein Abschluß in $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *ist selbstadjungiert) auf dem gemeinsamen Definitionsbereich von* $\ln(\Delta_{\mathfrak{N}})$ *und* $\ln(\Delta_{\mathfrak{M}})$. *Bezeichne* P *den selbstadjungierten Abschluß des Operators in (32.12) und sei* $U(a) \equiv \exp(iaP)$, *für* $a \in \mathbb{R}$. *Dann bestehen folgende Beziehungen:*

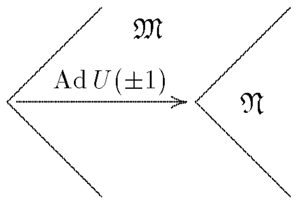
$$\Delta_{\mathfrak{M}}^{it} U(a) \Delta_{\mathfrak{M}}^{-it} = \Delta_{\mathfrak{N}}^{it} U(a) \Delta_{\mathfrak{N}}^{-it} = U(e^{\mp 2\pi t} a)\,, \quad \forall t,\; a \in \mathbb{R}\,, \tag{32.13i}$$

$$J_{\mathfrak{M}} U(a) J_{\mathfrak{M}} = J_{\mathfrak{N}} U(a) J_{\mathfrak{N}} = U(-a)\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,, \tag{32.13ii}$$

$$\Delta_{\mathfrak{N}}^{it} \mathfrak{M} \Delta_{\mathfrak{N}}^{-it} \subset \mathfrak{M}\,, \quad \textit{und} \quad U(t)\mathfrak{M}U(-t) \subset \mathfrak{M}\,, \quad \textit{für}\; \mp t \geq 0\,, \tag{32.13iii}$$

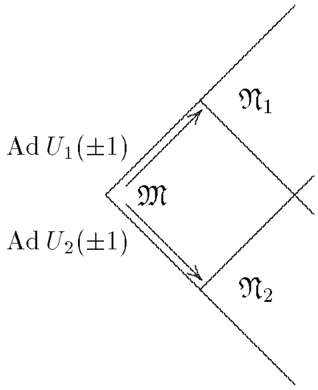
$$\mathfrak{N} = U(\pm 1)\mathfrak{M}U(\mp 1)\,. \tag{32.13iv}$$

Damit hat man auch eine einparametrige Translationsgruppe rekonstruiert. Im zweidimensionalen Bild der Keilalgebren kann man das so auffassen:



Übertragen auf den kompaktifizierten konformen Lichtkegel, d.h. die S^1 entsprechen $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ zwei Intervallalgebern, die zu Intervallen $\mathcal{I}$ $\mathcal{J}$ gehören, die den unendlich fernen Punkt als Randpunkt gemeinsam haben; zum Beispiel kann man $\mathfrak{M}$ als die Algebra des oberen Halb– und $\mathfrak{N}$ als die des linken oberen Viertelkreises betrachten, wenn wie üblich der unendlich ferne Punkt auf π abgebildet wird.

Um im zweidimensionalen die volle, zweiparametrige Translationsgruppe zu erhalten, muß man noch eine Algebra mehr betrachten, etwa wie in folgendem Bild:



Diese Konstruktion ist möglich, wenn man geeignete Forderungen an die Algebren stellt:

Lemma 32.6 *Sei $\{\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ $-hsm$ und $\{\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ $+hsm$. Gelte weiter*

$$J_{\mathfrak{N}_1} J_{\mathfrak{M}} J_{\mathfrak{M}} J_{\mathfrak{N}_2} = J_{\mathfrak{M}} J_{\mathfrak{N}_2} J_{\mathfrak{N}_1} J_{\mathfrak{M}} \,. \tag{32.14}$$

Dann erzeugen

$$\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}\,,\ \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{ir}\,,\ \Delta_{\mathfrak{N}_2}^{is}\,,\quad \forall t,\, r,\, s \in \mathbb{R}\,,$$

die dreidimensionale Untergruppe der $O(2,1)$ bestehend aus den zwei kommutierenden Translationen und der Lorentztransormation.

Beweis: Setzen wir nach Thm.32.5 für die Translationen an:

$$\begin{aligned} U_1(a) &\equiv \exp\left(\frac{ia}{2\pi}(\ln(\Delta_{\mathfrak{N}_1}) - \ln(\Delta_{\mathfrak{M}}))\right)\,, \\ U_2(a) &\equiv \exp\left(\frac{ia}{2\pi}(\ln(\Delta_{\mathfrak{N}_2}) - \ln(\Delta_{\mathfrak{M}}))\right)\,, \end{aligned} \tag{32.15}$$

für $a \in \mathbb{R}$. Daß $\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}$ die zweidimensionale Lorentztransformation relativ zu *beiden* Translationen induziert wissen wir schon aus Thm.32.2, wenn wir (32.13i) beachten. Es bleibt zu zeigen, daß die Translationsgruppen kommutieren, d.h., daß

$$[U_1(a), U_2(b)] = 0\,, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Aus (32.13iv) folgt insbesondere

$$J_{\mathfrak{N}_1} = U_1(1) J_{\mathfrak{M}} U_1(-1)\,,$$

denn

$$\begin{aligned} U_1(1) J_{\mathfrak{M}} U_1(-1) \mathfrak{N}_1 U_1(1) J_{\mathfrak{M}} U_1(-1) = U_1(1) J_{\mathfrak{M}} \mathfrak{M} J_{\mathfrak{M}} U_1(-1) = U_1(1) \mathfrak{M}' U_1(-1) = \\ = \mathfrak{N}_1' = J_{\mathfrak{N}_1} \mathfrak{N}_1 J_{\mathfrak{N}_1}\,. \end{aligned}$$

Mit (32.13ii) wird daraus

$$J_{\mathfrak{N}_1} J_{\mathfrak{M}} = U_1(1) J_{\mathfrak{M}} U_1(-1) J_{\mathfrak{M}} = U_1(1) J_{\mathfrak{M}}^2 U_1(1) = U_1(2)\,, \tag{32.16i}$$

und analog sieht man

$$J_{\mathfrak{M}} J_{\mathfrak{N}_2} = U_2(2)\,. \tag{32.16ii}$$

Damit wird Voraussetzung (32.14) zu

$$U_1(2)U_2(2) = U_2(2)U_1(2)\,.$$

Wendet man hierauf auf beiden Seiten $\mathrm{Ad}\,\Delta_M^{it}$ an und beutzt die Vertauschungsrelationen (32.13i), so ergibt sich

$$U_1(2e^{-2\pi t})U_2(2e^{2\pi t}) = U_2(2e^{2\pi t})U_1(2e^{-2\pi t})\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

d.h. der Kommutator

$$[U_1\left(\frac{2n}{a}\right), U_2(2ma)]\,,$$

ist null für alle $m,\,n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$. Wegen der Stetigkeit der Darstellungen U_1, U_2 ist damit $[U_1(a), U_2(b)] = 0$ für $a,\,b \in \mathbb{R}^+$. Um zu sehen, daß dies auch für entgegengesetzte Vorzeichen von a und b gilt, bemerken wir, daß aus (32.14) insbesondere

$$J_{\mathfrak{N}_2}J_{\mathfrak{M}}J_{\mathfrak{N}_1}J_{\mathfrak{M}} = J_{\mathfrak{N}_1}J_{\mathfrak{M}}J_{\mathfrak{N}_2}J_{\mathfrak{M}}\,,$$

folgt, d.h.

$$U_2(-2)U_1(2) = U_1(2)U_2(-2)\,,$$

(denn die modularen Konjugationen sind antiunitär, $J^2 = \mathbb{1}$). Mit den gleichen Argumenten wie oben folgt die Behauptung insgesamt. ■

Wählen wir etwas andere Relationen zwischen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$:

Lemma 32.7 *Seien folgende halbseitig modulare Inklusionen gegeben:*

i) $\{\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ *−hsm,*

ii) $\{\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ *+hsm und*

iii) $\{\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}_1', \Omega\}$ *−hsm.*

Dann erzeugen

$$\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}\,,\ \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{ir}\,,\ \Delta_{\mathfrak{N}_2}^{is}\,, \quad \forall t,\,r,\,s \in \mathbb{R}\,,$$

eine Darstellung der universellen Überlagerungsgruppe der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Beweis: Wenden wir Thm.32.5 auf die Inklusion i) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}\Delta_{\mathfrak{N}_1}^{it'} &= \Delta_{\mathfrak{M}}^{it}U_1(1)\Delta_{\mathfrak{M}}^{it'}U(-1) = \Delta_{\mathfrak{M}}^{i(t+t')}U_1(e^{2\pi t'}-1) = \\ &= U_1(e^{-2\pi t} - e^{-2\pi(t+t')})\Delta_{\mathfrak{M}}^{i(t+t')}\,,\end{aligned} \tag{32.17}$$

für t, $t' \in \mathbb{R}$ mit der üblichen Definition

$$U_1(a) \equiv \exp\left(\frac{ia}{2\pi}(\ln(\Delta_{\mathfrak{N}_1}) - \ln(\Delta_{\mathfrak{M}}))\right)\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,.$$

Das zeigt bereits, daß $\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}$, $\Delta_{\mathfrak{N}_1}^{it'}$ eine zweidimensionale unitäre Gruppe aufspannen. Setzt man

$$U_1(a) \equiv \exp\left(\tfrac{ia}{2\pi}(\ln(\Delta_{\mathfrak{N}_2}) - \ln(\Delta_{\mathfrak{M}}))\right) \quad \text{und}$$

$$U_1(a) \equiv \exp\left(\tfrac{ia}{2\pi}(\ln(\Delta_{\mathfrak{N}_1}) + \ln(\Delta_{\mathfrak{N}_2}))\right)\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,,$$

so erhält man aus den beiden anderen Inklusionen ähnlich

$$\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}\Delta_{\mathfrak{N}_2}^{it'} = \Delta_{\mathfrak{M}}^{i(t+t')}U_2(e^{-2\pi t'}-1) \tag{32.18}$$

und

$$\Delta_{\mathfrak{N}_1}^{-it}\Delta_{\mathfrak{N}_2}^{it'} = \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{-i(t+t')}U_3(e^{2\pi t'}-1)\,, \tag{32.19}$$

für $t,\ t' \in \mathbb{R}$ (für die letzte Gleichung beachte man (A.9) und Thm.A.22). Damit folgt

$$\begin{aligned} U_3(e^{-2\pi t}-1) &= \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{-it}\Delta_{\mathfrak{N}_2}^{-it} = \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{-it}\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}\Delta_{\mathfrak{M}}^{-2it}\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}\Delta_{\mathfrak{N}_2}^{-it} = \\ &= U_1(1-e^{2\pi t})\Delta_{\mathfrak{M}}^{-2it}U_2(e^{2\pi t}-1)\,. \end{aligned} \tag{32.20}$$

Diese Gleichungen beweisen, daß $\Delta_{\mathfrak{M}}^{it}$, $\Delta_{\mathfrak{N}_1}^{ir}$, $\Delta_{\mathfrak{N}_2}^{is}$, $\forall t,\, r,\, s \in \mathbb{R}$ eine dreidimensionale, unitäre Gruppe G erzeugen. Faßt man (32.17), (32.18) und (32.19) als Vertauschungsrelationen auf und linearisiert durch logarithmieren, so kann man nach einiger Rechnung die Kommutatorrelationen der zugehörigen Lie-Algebra gewinnen:

$$\begin{aligned} [\ln\Delta_{\mathfrak{M}}, \tfrac{1}{2\pi}(\ln\Delta_{\mathfrak{N}_1} - \ln\Delta_{\mathfrak{M}})] &= i(\ln\Delta_{\mathfrak{N}_1} - \ln\Delta_{\mathfrak{M}})\,, \\ [\ln\Delta_{\mathfrak{M}}, \tfrac{1}{2\pi}(\ln\Delta_{\mathfrak{N}_2} - \ln\Delta_{\mathfrak{M}})] &= i(\ln\Delta_{\mathfrak{N}_2} - \ln\Delta_{\mathfrak{M}})\,, \\ [\ln\Delta_{\mathfrak{N}_1}, \tfrac{1}{2\pi}(\ln\Delta_{\mathfrak{N}_1} + \ln\Delta_{\mathfrak{N}_2})] &= i(\ln\Delta_{\mathfrak{N}_1} + \ln\Delta_{\mathfrak{N}_2})\,. \end{aligned} \tag{32.21}$$

Damit bilden die Generatoren

$$\begin{aligned} P &\equiv \tfrac{1}{2\pi}(\ln\Delta_{\mathfrak{N}_1} - \ln\Delta_{\mathfrak{M}})\,, \\ K &\equiv \tfrac{1}{2\pi}(\ln\Delta_{\mathfrak{N}_2} - \ln\Delta_{\mathfrak{M}})\,, \\ D &\equiv \tfrac{1}{2\pi}(\ln\Delta_{\mathfrak{M}})\,, \end{aligned} \tag{32.22}$$

eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ und G ist isomorph zu einer Darstellung der universellen Überlagerung der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. ■

Bezeichnen wir diese Darstellung von nun an mit $\mathcal{V}$. Um von hier zu einer Darstellung von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ zu kommen, müssen wir die Rotation um π identifizieren. Wiesbrock beweist dazu zunächst folgendes Lemma:

Lemma 32.8 *Seien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ wie in Lemma 32.7. Dann gilt*

$$\mathcal{V}(U_{P-K}(\pi)) = \exp\left(i\pi(P-K)\right) = U_1(-2)U_2(\tfrac{1}{2})\Delta_{\mathfrak{M}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}}U_2(-\tfrac{1}{2})\,. \tag{32.23}$$

Mit diesem technischen Zwischenergebnis können wir endlich zeigen:

Satz 32.9 *Sei $\{\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M},\Omega\}$ eine $-$halbseitig modulare standard Inklusion, d.h. sei Ω auch zyklisch und separierend für $\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M}$. Dann erzeugen*

$$\Delta_{\mathfrak{M}}^{it},\ \Delta_{\mathfrak{N}}^{ir},\ \Delta_{\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M}}^{is},\quad \forall t,\, r,\, s\in\mathbb{R}\,,$$

eine Darstellung von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ *.*

Beweis: Wir wollen Lemma 32.7 anwenden. Dazu bemerken wir, daß

i) $\{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ $-$hsm ist

nach Voraussetzung,

ii) $\{(\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ $+$hsm ist

wenn man zum relativen Kommutanten in $\mathfrak{M}$ übergeht und benutzt, daß die Inklusion standard ist und schließlich, daß

iii) $\{(\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M}) \subset \mathfrak{N}', \Omega\}$ $-$hsm ist

nach (32.13iii). Damit können wir Lemma 32.7 mit $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M}$ anwenden. Rechnen wir nun die Rotation um π aus: Halten wir zuerst in Analogie zu (32.16i) fest:

$$U_1(-2) = J_{\mathfrak{M}} J_{\mathfrak{N}_1} , \quad U_2(-2) = J_{\mathfrak{M}} J_{\mathfrak{N}_2} , \quad U_3(-2) = J_{\mathfrak{N}_1} J_{\mathfrak{N}_2} ,$$

in den Bezeichnungen von Lemma 32.7. Invertieren wir (32.20) so folgt damit

$$U_2(\frac{1}{2})\Delta_{\mathfrak{M}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} U_1(-\frac{1}{2}) = U_3(-1) = \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} U_3(-2)\Delta_{\mathfrak{N}_1}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} = \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} J_{\mathfrak{N}_1} J_{\mathfrak{N}_2} \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} ,$$

unter Beachtung von (32.13i). Damit wird (32.23) zu

$$\mathcal{V}(U_{P-K}(\pi)) = J_{\mathfrak{M}} J_{\mathfrak{N}_1} \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} J_{\mathfrak{N}_1} J_{\mathfrak{N}_2} \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} = J_{\mathfrak{M}} \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} J_{\mathfrak{N}_2} \Delta_{\mathfrak{N}_1}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} . \tag{32.24}$$

Weiter rechnen wir (nun mit den Bezeichnungen dieses Satzes, wobei U_1 durch $\{\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}, \Omega\}$ definiert wird)

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} (\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M}) \Delta_{\mathfrak{N}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} &= \mathfrak{N}' \cap \Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} \mathfrak{M} \Delta_{\mathfrak{N}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} = \mathfrak{N}' \cap \Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} U_1(-1) \mathfrak{N} U_1(1) \Delta_{\mathfrak{N}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} = \\ &= \mathfrak{N}' \cap U_1(-2) \mathfrak{N} U_1(2) = \mathfrak{N}' \cap J_{\mathfrak{M}} J_{\mathfrak{N}} \mathfrak{N} J_{\mathfrak{N}} J_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}' \cap J_{\mathfrak{M}} \mathfrak{N}' J_{\mathfrak{M}} ,\end{aligned}$$

mit (32.13iv). Das zeigt, daß die Menge

$$\Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} (\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M}) \Delta_{\mathfrak{N}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} ,$$

Ad $J_{\mathfrak{M}}$ invariant ist und damit:

$$[J_{\mathfrak{M}}, \Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} J_{\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M}} \Delta_{\mathfrak{N}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}}] = 0 .$$

Das heißt aber nach (32.24)

$$\left(J_{\mathfrak{M}} \Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}} J_{\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M}} \Delta_{\mathfrak{N}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} \right)^2 = \mathbb{1} ,$$

woraus unmittelbar $\mathcal{V}(U_{P-K}(\pi))^2 = \mathbb{1}$ folgt. Damit haben wir eine Darstellung von SL(2,$\mathbb{R}$)/ $\mathbb{Z}_2$ vorliegen. ■

Mit diesen Hilfsmitteln an der Hand können wir eine ACQFT auf der S^1 algebraisch definieren. Das wird, wie in Fig.32.1 dargestellt, so aussehen, daß eine Algebra ($\mathfrak{M}$) dem oberen Halbkreis, die andere ($\mathfrak{N}$) dem linken Halbkreis zugeordnet wird. Ihr Schnitt entspricht dann der Algebra des zweiten Quadranten.

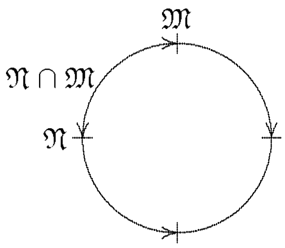


Fig. 32.1: Drei definierende Algebren einer ACQFT.

Theorem 32.10 *Seien*

i) $\{(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M})\subset\mathfrak{M},\Omega\}$ *−hsm,*

ii) $\{(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M})\subset\mathfrak{N},\Omega\}$ *+hsm und*

iii) $J_{\mathfrak{N}}\mathfrak{M}J_{\mathfrak{N}}=\mathfrak{M}$ *.*

Faßt man $\mathfrak{M}$ *als Observablenalgebra des oberen Halbkreises,* $\mathfrak{N}$ *als die des linken Halbkreises und* $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}$ *als die des zweiten Quadranten auf, so definieren i)—iii) in kanonischer Weise eine ACQFT auf der* S^1 *, d.h. ein lokales Netz von von Neumann Algebren, die sich kovariant unter* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ *transformieren. Die Kovarianzdarstellung hat positive Energie und das Netz erfüllt Haag-Dualität. Außerdem gilt die Reeh-Schlieder-Eigenschaft für die Algebra jedes eigentlichen Intervalls.*

Beweis: Zuerst wollen wir Lemma 32.7 und Satz 32.9 anwenden um zu zeigen, daß

$$\Delta^{it}_{\mathfrak{M}}\,,\ \Delta^{ir}_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}}\,,\ \Delta^{is}_{\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M}}\,,\quad \forall t,\,r,\,s\in\mathbb{R}\,,$$

eine Darstellung der Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ bilden. Um das Lemma benutzen zu können, haben wir folgende Voraussetzungen zu erfüllen:

a) $\{(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M})\subset\mathfrak{M},\Omega\}$ muß −hsm,

b) $\{(\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M})\subset\mathfrak{M},\Omega\}$ muß +hsm und

c) $\{(\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M})\subset(\mathfrak{N}'\cup\mathfrak{M}',\Omega\}$ muß −hsm

sein. a) ist nur die Voraussetzung i), und für b) bemerkt man, daß aus iii) folgt: $[J_{\mathfrak{N}},\Delta_{\mathfrak{M}}]=0$. Wendet man $\mathrm{Ad}\,J_{\mathfrak{N}}$ auf die −hsm a) an, so ergibt sich unmittelbar b). C) ist etwas schwieriger: Wenden wir Thm.32.5 auf die +hsm i) an, so erhalten wir eine einparametrige, unitäre Gruppe

$$\widetilde{U}(a)\equiv\exp\left(\frac{ia}{2\pi}(\ln(\Delta_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}})-\ln(\Delta_{\mathfrak{N}}))\right)\,,$$

mit

$$\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}=\widetilde{U}(-1)\mathfrak{N}\widetilde{U}(1)\,,$$

und

$$\Delta^{-it}_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}}=\Delta^{it}_{\mathfrak{N}'\cup\mathfrak{M}'}=\widetilde{U}(-1)\Delta^{-it}_{\mathfrak{N}}\widetilde{U}(1)=\widetilde{U}(-1+e^{-2\pi t}\Delta^{-it}_{\mathfrak{N}}\,,$$

(beachte (A.9) für den ersten Schritt). Damit wird

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}\,(\Delta^{it}_{\mathfrak{N}'\cup\mathfrak{M}'})\,(\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M})&=\mathrm{Ad}\left(\widetilde{U}(-1+e^{-2\pi t})\Delta^{-it}_{\mathfrak{N}}\right)(\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M})=\\&=\mathrm{Ad}\left(\widetilde{U}(-1+e^{-2\pi t})\Delta^{-it}_{\mathfrak{N}}J_{\mathfrak{N}}\right)(\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M})=\\&=\mathrm{Ad}\left(J_{\mathfrak{N}}\widetilde{U}(1-e^{-2\pi t})\Delta^{it}_{\mathfrak{N}}\right)(\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M})\,,\end{aligned}$$

mit Voraussetzung iii) und (32.13ii). Nach Voraussetzung ii) ist $\{(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M})\subset\mathfrak{N},\Omega\}$ +hsm und (32.13iv) zeigt

$$\widetilde{U}(a)(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M})\widetilde{U}(-a)\subset\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}\,,\quad \forall a\leq 0\,.$$

Wendet man dies in der letzten Gleichung an, so erhält man die Inklusion

$$\Delta^{it}_{\mathfrak{N}'\cup\mathfrak{M}'}(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M})\Delta^{-it}_{\mathfrak{N}'\cup\mathfrak{M}'}\subset J_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M})J_{\mathfrak{N}}=\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M}\,,\quad \forall t\leq 0\,,$$

d.h. c) ist erfüllt und Lemma 32.7 ist anwendbar. Wir bezeichnen die resultierende Darstellung der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ wieder mit $\mathcal{V}$, ihre Generatoren mit P , K und D. Um die Symmetrie auf $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ zu reduzieren müssen wir den zu (32.24) analogen Ausdruck betrachten. Dazu bemerken wir, daß gilt:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}}(\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M})\Delta_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}} &= \mathrm{Ad}\left(\Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}}\widetilde{U}(-1)\right)(\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M}) =\\ &= \mathrm{Ad}\left(\Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}}\widetilde{U}(-1)J_{\mathfrak{N}}\right)(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}) =\\ &= \mathrm{Ad}\left(\Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}}J_{\mathfrak{N}}\widetilde{U}(1)\right)(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}) = \mathrm{Ad}\left(\Delta_{\mathfrak{N}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}}J_{\mathfrak{N}}\right)(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}'\,,\end{aligned}$$

mit (32.13ii). Damit wird

$$\Delta_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}}^{-\frac{2i\ln 2}{2\pi}}J_{\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{M}}\Delta_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}}^{\frac{2i\ln 2}{2\pi}}=J_{\mathfrak{N}}\,,$$

das heißt

$$\mathcal{V}(U_{P-K})=J_{\mathfrak{M}}J_{\mathfrak{N}}=J_{\mathfrak{N}}J_{\mathfrak{M}}\,,$$

denn nach Voraussetzung iii) ist insbesondere $[J_{\mathfrak{M}},J_{\mathfrak{N}}]=0$. Das zeigt $\mathcal{V}(U_{P-K})^2=\mathbb{1}$ und die Symmetrie ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Definieren wir jetzt das lokale Netz: Bezeichnen wir das eigentliche Intervall der S^1 mit den Grenzpunkten a und b durch (a,b). Es existiert wenigstens ein $g_{(a,b)}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, so daß $g_{(a,b)}(-1,1)=(a,b)$ ist. Definieren wir

$$\mathfrak{A}(a,b)\equiv\mathcal{V}(g_{(a,b)})\mathfrak{M}\mathcal{V}(g_{(a,b)})^*\,. \tag{32.25}$$

Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl von $g_{(a,b)}$ mit obiger Eigenschaft: Jedes $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ kann eindeutig zerlegt werden in ein Produkt aus einer Rotation, einer Translation und einer Dilatation zerlegt werden:

$$g=\rho(t)\cdot\sigma(\tau)\cdot\delta(\lambda)\,,$$

(vgl. §24). Man sieht dann leicht, daß sich zwei Elemente g_1 , g_2 , die beide $(-1,1)$ in (a,b) transformieren nur um einen Dilatationsfaktor unterscheiden können. Dilatationen werden aber unter $\mathcal{V}$ dargestellt durch

$$\mathcal{V}(\delta(\lambda))=\mathcal{V}(U_D(\lambda))=\Delta_{\mathfrak{M}}^{-\frac{i\ln\lambda}{2\pi}}\,,$$

also durch die modulare Gruppe von $\mathfrak{M}$, was die Wohldefiniertheit von $\mathfrak{A}(a,b)$ zeigt. das so definierte lokale Algebrennetz transformiert sich nach Konstruktion kovariant unter $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ $/\mathbb{Z}_2$, Die Darstellung hat positive Energie, da (32.12) positiv ist. Die modularen Strukturen erlauben uns wie in §25 Haag-Dualität einzusehen: Wir wissen, daß eine Rotation um π nichts anderes ist als $\mathcal{V}(\rho(\pi))=\mathcal{V}(U_{P-K}(\pi)=J_{\mathfrak{N}}J_{\mathfrak{M}}$. Außerdem sieht man leicht, daß

$g_{(b,a)} = g_{(a,b)} \cdot \rho(\pi)$ ist, und diese Transformation bildet den oberen Halbkreis auf das Komplement $(a,b)' = S^1 \setminus [a,b]$ ab. Damit gilt:

$$\begin{aligned} A\ (b,a) &= \mathcal{V}(g_{(b,a)})\mathfrak{M}\mathcal{V}(g_{(b,a)})^* = \mathcal{V}(g_{(a,b)})\mathcal{V}(\rho(\pi))\mathfrak{M}\mathcal{V}(\rho(\pi))^*\mathcal{V}(g_{(a,b)})^* = \\ &= \mathcal{V}(g_{(a,b)})J_{\mathfrak{M}}J_{\mathfrak{N}}\mathfrak{M}J_{\mathfrak{N}}J_{\mathfrak{M}}\mathcal{V}(g_{(a,b)})^* = \mathcal{V}(g_{(a,b)})\mathfrak{M}'\mathcal{V}(g_{(a,b)})^* = \\ &= \left(\mathcal{V}(g_{(a,b)})\mathfrak{M}'\mathcal{V}(g_{(a,b)})^*\right)' = \mathfrak{A}(a,b)'\,. \end{aligned} \tag{32.26}$$

Isotonie des Netzes sieht man so: Translationen werden dargestellt durch

$$\mathcal{V}(\sigma(a)) = \exp\left(\frac{ia}{2\pi}(\ln(\Delta_{\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}}) - \ln(\Delta_{\mathfrak{M}}))\right)\,.$$

Aus Thm.32.5 folgt dann insbesondere

$$\mathcal{V}(\sigma(a))\mathfrak{M}\mathcal{V}(\sigma(a))^* \subset \mathfrak{M}\,, \quad \forall a \geq 0\,,$$

d.h.

$$\mathfrak{A}(a,-1) \subset \mathfrak{A}(b,-1) \quad \text{für } (a,-1) \subset (b,-1)\,.$$

Benutzt man geeignete Rotationen, so zeigt dies

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}(a,c) \subset \mathfrak{A}(b,c)\,, \quad \text{für } (a,c) \subset (b,c) \quad \text{und} \\ &\mathfrak{A}(c,a) \subset \mathfrak{A}(c,b)\,, \quad \text{für } (c,a) \subset (c,b)\,, \end{aligned} \tag{32.27}$$

letzteres nach Übergang zu den Kommutanten unter Verwendung der Haag-Dualität (32.26). Lokalität ist nun trivial, da Haag-Dualität sowieso schon eine schärfere Bedingung ist: Seien (a,b), (c,d) eigentliche Intervalle mit leerem Schnitt. Dann ist $(a,b) \subset (c,d)' = (d,c)$ und damit

$$\mathfrak{A}(a,b) \subset \mathfrak{A}(d,c) = \mathfrak{A}(c,d)'\,.$$

Schließlich folgt die Reeh-Schlieder-Eigenschaft für die lokalen Algebren aus der von $\mathfrak{M}$. ■

Mit geringen zusätzlichen Forderungen konnte Wiesbrock zudem die starke Additivität der konstruierten ACQFT herleiten, vgl. [Wie94].

ANHANG A

C- und von Neumann Algebren*

Dieser Anhang listet in unsystematischer Weise im Text verwendete Tatsachen über C*- und von Neumann Algebren auf.

Definition A.1 *Eine C*-Algebra heißt* **konkret***, wenn sie eine Unteralgebra der Algebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$ *,* $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *ist. Sonst heißt sie* **abstrakt***.*

Eine ausgezeichnete Menge in einer C*-Algebra bilden die *positiven* Elemente:

Definition A.2 *Ein Element A einer C*-Algebra* $\mathfrak{A}$ *heißt* **positiv***, wenn es selbstadjungiert ist und* $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ *gilt. Die Menge der positiven Elemente aus* $\mathfrak{A}$ *wird mit* $\mathfrak{A}^+$ *bezeichnet.*

Lemma A.3 *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine konkrete C*-Algebra mit Identität* $\mathbb{1}$ *. Ein selbstadjungiertes Element* $A \in \mathfrak{A}$ *ist genau dann positiv, wenn* $||\mathbb{1} - A/||A||\,|| \leq 1$ *. Ist A selbstadjungiert,* $||A|| \leq 1$ *, und* $||\mathbb{1} - A|| \leq 1$ *, dann ist A positiv. ([BR79], Lemma 2.2.9).*

Neben der Normtopologie existieren auf $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ noch etliche lokalkonvexe Topologien, die von Systemen von Halbnormen erzeugt werden:

Definition A.4 *Sei* $\mathfrak{H}$ *ein separabler Hilbertraum,* $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *die Menge der in der Norm* $A \mapsto ||A|| \equiv \sup_{\phi \in \mathfrak{H}} \frac{||A\phi||}{||\phi||}$ *beschränkten Operatoren auf* $\mathfrak{H}$ *.*

1. *Die von den Halbnormen* $\mathcal{B}(\mathfrak{H}) \ni A \mapsto ||A\phi||$*,* $\phi \in \mathfrak{H}$*, erzeugte Topologie heißt* **starke Topologie** *auf* $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *.*

2. *Die von den Halbnormen* $A \mapsto \left(\sum_n ||A\phi_n||^2\right)^{1/2}$ *für Folgen* $(\phi_n) \subset \mathfrak{H}$ *mit* $\sum_n ||\phi_n||^2 < \infty$ *erzeugte Topologie heißt* σ**-starke Topologie***.*

3. *Die von den Halbnormen* $A \mapsto |\langle \xi | A\phi \rangle|$*,* ξ*,* $\phi \in \mathfrak{H}$*, erzeugte Topologie heißt* **schwache Topologie***.*

4. *Die von den Halbnormen* $A \mapsto \sum_n |\langle \xi | A\phi_n \rangle|$ *für Folgen* (ϕ_n)*,* $(\xi_n) \subset \mathfrak{H}$ *mit* $\sum_n ||\phi_n||^2 < \infty$*,* $\sum_n ||\xi_n||^2 < \infty$ *erzeugte Topologie heißt* σ**-schwache Topologie***.*

5. *Die von den Halbnormen* $A \mapsto ||A\phi|| + ||A^*\phi||$*,* $\phi \in \mathfrak{H}$*, erzeugte Topologie heißt* **starke* Topologie** *auf* $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *.*

6. *Die von den Halbnormen* $A \mapsto \left(\sum_n ||A\phi_n||^2 + \sum_n ||A^*\phi_n||^2\right)^{1/2}|$ *für Folgen* $(\phi_n) \subset \mathfrak{H}$ *mit* $\sum_n ||\phi_n||^2 < \infty$ *erzeugte Topologie heißt* σ**-starke* Topologie***.*

Satz A.5 ([BR79], Abschnitt 2.4.1) *Zwischen den obengenannten Topologien auf $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ bestehen folgende Verhältnisse:*

$$\begin{array}{ccccccc} \textit{Norm} & < & \sigma\text{-}\textit{stark*} & < & \sigma\text{-}\textit{stark} & < & \sigma\text{-}\textit{schwach} \\ & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\ & & \textit{stark*} & < & \textit{stark} & < & \textit{schwach} \end{array}$$

Dabei steht „$<$“ für „feiner als“.

Satz A.6 ([BR79], Abschnitt 2.4.1) *i) Die starke, die starke* und die σ-starke Topologie sind auf der Einheitskugel von $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ identisch. Die Einheitskugel ist vollständig in diesen Topologien.*

ii) Die schwache und die σ-schwache Topologie sind auf der Einheitskugel von $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ identisch. Die Einheitskugel ist kompakt in diesen Topologien.

Satz A.7 ([BR79], Prop.2.4.3) *Sei* Tr *die Spur auf $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ und $\mathcal{T}(\mathfrak{H})$ der Banachraum der Spurklassenoperatoren auf $\mathfrak{H}$ versehen mit der Spur-Norm $\mathcal{T}(\mathfrak{H}) \ni T \mapsto ||T||_{\mathrm{Tr}} \equiv \sup_{B\in\mathcal{B}(\mathfrak{H})} \frac{|\mathrm{Tr}(TB)|}{||B||}$. Dann ist $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ der Dualraum von $\mathcal{T}(\mathfrak{H})$ bezüglich der Dualität*

$$\mathcal{B}(\mathfrak{H}) \times \mathcal{T}(\mathfrak{H}) \ni (A,T) \mapsto \mathrm{Tr}(AT)\,.$$

Die schwache-Topologie auf $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, die durch diese Dualität induziert wird, ist gerade die σ-schwache Topologie.*

Satz A.8 (Kaplansky's Dichtheits-Theorem, [BR79], Satz 2.4.16) *. Ist $\mathfrak{A}$ eine konkrete C*-Algebra, dann ist die Einheitskugel von $\mathfrak{A}$ σ-stark* dicht in der Einheitskugel des schwachen Abschlusses von $\mathfrak{A}$.*

Definition A.9 *Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra von beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Dann bezeichnet $\mathfrak{A}'$ den* **Kommutanten** *von $\mathfrak{A}$, definiert durch*

$$\mathfrak{A}' \equiv \{B\in\mathcal{B}(\mathfrak{H}) | AB = BA\ \forall A\in\mathfrak{A}\}\,.$$

Satz A.10 (von Neumann Bikommutant-Theorem) *Sei $\mathfrak{A}$ eine *-Algebra mit Einheit von Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Genau dann ist $\mathfrak{A}$ schwach abgeschlossen, d.h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^-$, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$ gilt. $\mathfrak{A}$ heißt dann* **von Neumann Algebra**.

Satz A.11 ([BR79], Thm.2.4.21) *Sei ω ein Zustand über einer konkreten von Neumann Algebra $\mathfrak{A}$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

ii) ω ist σ-schwach stetig.

iii) es gibt eine Dichtematrix ρ, d.h. einen positiven Spurklassenoperator ρ auf $\mathfrak{H}$ mit $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$, so daß

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)\,, \quad \forall A\in\mathfrak{A}.$$

Definition A.12 *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine von Neumann Algebra von Operatoren auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$ *. Das* **Zentrum** $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A})$ *von* $\mathfrak{A}$ *ist definiert durch*

$$\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' . \tag{A.1}$$

Man nennt $\mathfrak{A}$ *einen* **Faktor**, *wenn* $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A})$ *trivial ist, d.h. wenn* $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{A}) = \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$ *.*

Definition A.13 *i) Zwei Darstellungen einer C*-Algebra heißen* **disjunkt**, *wenn sie keine Unterdarstellungen enthalten, die unitäräquivalent sind.*

ii) Zwei Darstellungen heißen **quasiäquivalent**,*wenn jede Unterdarstellung der einen unitäräquivalent zu einer Unterdarstellung der anderen ist.*

iii) Eine Darstellung heißt **primär**, *wenn sie quasiäquivalent ist zu jeder ihrer Unterdarstellungen.*

Diese Begriffe übertragen sich natürlicherweise auf Zustände deren GNS-Darstellungen die entsprechenden Eigenschaften haben.

Definition A.14 *Sei* π_ω *die GNS-Darstellung zum Zustand* ω *auf* $\mathfrak{H}_\omega$ *einer C*-Algebra* $\mathfrak{A}$ *.*

i) Die Zustände der Form

$$\omega_\Psi(A) \equiv \langle \Psi | \pi_\omega(A) \Psi \rangle , \quad \forall A \in \mathfrak{A} , \tag{A.2}$$

mit dem Skalarprodukt $\langle\, . \,|\, . \,\rangle$ *in* $\mathfrak{H}_\omega$ *, heißen* **Vektorzustände der Darstellung** π_ω.

ii) Die Zustände der Form

$$\omega_\rho(A) \equiv \mathrm{Tr}(\rho \pi_\omega(A)) , \quad \forall A \in \mathfrak{A} , \tag{A.3}$$

mit einem positiven Spurklassenoperator ρ *in* $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_\omega)$ *bilden das* **Folium der Darstellung** π_ω *. Diese nach Satz A.11* σ*-schwach stetigen Zustände heißen* **normale** *Zustände der von Neumann Algebra* $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ *.*

Satz A.15 *Das Folium einer treuen Darstellung einer C*-Algebra ist schwach dicht in der Menge aller Zustände über dieser Algebra.*

Theorem A.16 (Banach-Alaoglu) *Ist* $\mathcal{X}$ *ein Banachraum,* $\mathcal{X}^*$ *sein Dualraum,* $\mathcal{X}_1^*$ *die Einheitskugel von* $\mathcal{X}^*$ *, so ist* $\mathcal{X}_1^*$ *kompakt in der schwachen *-Topologie, die durch die Dualität auf* $\mathcal{X}^*$ *induziert wird.*

Theorem A.17 (Krein-Milman) *Ist* V *eine nichtleere konvex-kompakte Untermenge eines lokalkonvexen Raumes, dann besitzt* V *einen Extremalpunkt. Darüberhinaus ist* V *der Abschluß der konvexen Hülle von* E*, wobei* E *die Menge der Extremalpunkte von* V *bezeichnet.*

Satz A.18 ([BR79], Lemma 4.2.8) *Seien* ω_1 *,* ω_2 *zwei Zustände einer von Neumann Algebra* $\mathfrak{A}$ *und sei* $\omega = \omega_1 + \omega_2$ *. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

i) ω_1 *und* ω_2 *sind disjunkt;*

ii) es existiert ein zentraler Projektor $P \in \boldsymbol{Z}(\mathfrak{A})$ *, so daß*

$$\begin{aligned}\omega_1(A) &= \langle \Omega_\omega | P \pi_\omega(A) \Omega_\omega \rangle , \\ \omega_2(A) &= \langle \Omega_\omega | (\mathbb{1} - P) \pi_\omega(A) \Omega_\omega \rangle ,\end{aligned}$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$ *, mit dem Vakuumvektor* Ω_ω *der GNS-Darstellung von* ω *auf* $\mathfrak{H}_\omega$ *und dem Skalarprodukt auf demselben Hilbertraum.*

Definition A.19 *Sei $\mathfrak{A}$ eine von Neumann Algebra auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Eine Untermenge $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{H}$ heißt* **zyklisch** *für $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{K}$ dicht liegt in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{K}$ heißt* **separierend** *für $\mathfrak{A}$, falls für jedes $A\in\mathfrak{A}$ aus $A\xi = 0$ für alle $\xi\in\mathfrak{K}$ folgt, daß $A = 0$ ist.*

Lemma A.20 ([BR79], Prop.2.5.3.) *Sei $\mathfrak{A}$ eine von Neumann Algebra auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{H}$ eine Untermenge. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

i) $\mathfrak{K}$ ist zyklisch für $\mathfrak{A}$;

ii) $\mathfrak{K}$ ist separierend für $\mathfrak{A}'$.

Satz und Definition A.21 ([BR79], Def.2.5.10., Prop.2.5.11.) *Sei $\mathfrak{A}$ eine von Neumann Algebra auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und sei $\Omega\in\mathfrak{H}$ zyklisch und separierend für $\mathfrak{A}$. Nach Lemma A.20 ist Ω dann acuh zyklisch und separierend für $\mathfrak{A}'$ und wir können zwei antilineare Operatoren durch*

$$S_0 A\Omega \equiv A^*\Omega\,, \quad \text{für } A\in\mathfrak{A}\,, \tag{A.4}$$

und

$$F_0 A' \equiv A'^*\Omega\,, \quad \text{für } A'\in\mathfrak{A}'\,, \tag{A.5}$$

auf den dichten Untermengen $\mathfrak{K}\Omega$, bzw. $\mathfrak{K}'\Omega$ definieren. Diese Operatoren sind abschließbar und es gilt

$$S_0^* = \overline{F_0}\,, \quad F_0^* = \overline{S_0}\,, \tag{A.6}$$

wobei der Strich Abschluß bedeutet. Bezeichne

$$S \equiv \overline{S_0}\,, \quad F \equiv \overline{F_0}\,, \tag{A.7}$$

Sei Δ der eindeutig bestimmte, positive, selbstadjungierte Operator und J der eindeutig bestimmte antiunitäre Operator, der in der polaren Zerlegung

$$S \equiv J\Delta^{\frac{1}{2}}\,, \tag{A.8}$$

von S auftritt. Δ heißt **modularer Operator** *des Paares $(\mathfrak{A},\Omega)$, J heißt* **modulare Konjugation**. *Es gelten die folgenden Relationen:*

$$\begin{array}{c} \Delta = FS\,, \quad \Delta^{-1} = SF\,, \\ S = J\Delta^{\frac{1}{2}}\,, \quad F = J\Delta^{-\frac{1}{2}}\,, \\ J = J^*\,, \quad J^2 = \mathbb{1}\,, \\ \Delta^{-\frac{1}{2}} = J\Delta^{\frac{1}{2}}J\,. \end{array} \tag{A.9}$$

Theorem A.22 (Tomita-Takesaki, [BR79], Thm.2.5.14) *Sei $\mathfrak{A}$ eine von Neumann Algebra auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und sei $\Omega\in\mathfrak{H}$ zyklisch und separierend für $\mathfrak{A}$. Seien Δ und J der zugehörige modulare Operator und die modulare Konjugation. Dann folgt, daß*

$$J\mathfrak{A}J = \mathfrak{A}'\,, \tag{A.10}$$

und weiterhin

$$\Delta^{it}\mathfrak{A}\Delta^{-it} = \mathfrak{A}\,, \tag{A.11}$$

für alle $t\in\mathbb{R}$.

Satz und Definition A.23 ([BR79], Def.2.5.15) *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine von Neumann Algebra auf einem Hilbertraum* $\mathfrak{H}$ *und sei* $\Omega \in \mathfrak{H}$ *zyklisch und separierend für* $\mathfrak{A}$. *Seien* Δ *und* J *der zugehörige modulare Operator und die modulare Konjugation. Dann wird durch*

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \sigma_t\,, \quad \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \sigma_t(A) \equiv \Delta^{it} A \Delta^{-it}\,, \tag{A.12}$$

eine σ*-schwach stetige einparametrige Untergruppe von* $*$*-Automorphismen auf* $\mathfrak{A}$ *definiert. Diese Gruppe heißt* **modulare Automorphismengruppe** *des Paares* $(\mathfrak{A}, \Omega)$,

ANHANG B

Neuere Entwicklungen

Dieser Anhang soll einige neuere Strömungen in der algebraischen Quantenfeldtheorie anreißen, die in der Zeit von 1994 bis 1996 aufgekommen sind, und außerdem die weitere Entwicklung der in diesem Buch behandelten Themen skizzieren. Dabei erhebe ich keinen Anspruch auf besondere Ausführlichkeit oder Vollständigkeit. Vielmehr habe ich aus der Vielfalt möglicher Themen einige, die mir besonders interessant erscheinen, herausgegriffen. Ich hoffe, daß die gebotenen Informationen dem interessierten Leser zu einem leichten Einstieg in die relevante Literatur verhelfen.

Viele wichtige Themen werden dabei nicht angesprochen. So zum Beispiel *lokale Netze von Subfaktoren* (siehe unter anderem [LR95], [Reh95] und [RST96]), wo die „relative Position" einer „Subtheorie" innerhalb eines lokalen Netzes und *lokale Erweiterungen* algebraischer Quantenfeldtheorien studiert werden. Oder die Fortschritte auf dem Gebiet der *Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten* (siehe u.a. [Rad96], [BFK96] und [BF97]). Ebensowenig können wir auf das Thema Modellbildung in der algebraischen Quantenfeldtheorie eingehen, siehe nur [Adl96].

§B.1 Algebraische Rekonstruktion und Quanten–Symmetrie

Ein wichtiges und schönes Gebiet, das im vorliegenden Buch nicht behandelt wurde, ist die Rekonstruktion von *Eichsymmetrien* aus den intrinsischen Strukturen des lokalen Netzes und seiner Darstellungstheorie. Dies wurde seinerzeit von Reinhard Häring in seiner Arbeit [Här93] behandelt.

Die ursprüngliche Methode, aus den Darstellungen (Endomorphismen) eines lokalen Netzes mit Permutationsgruppenstatistik die Feldalgebra über der Observablenalgebra zu konstruieren und damit die zugehörige Eichgruppe als *kompakte Gruppe* zu erhalten, ist in [DR89a], [DR89b] (mathematisch) und [DR90] (in der Anwendung auf die algebraische Quantenfeldtheorie) beschrieben. Das nach Doplicher und Roberts benannte *Rekonstruktionstheorem* verwendet die sogenannten *Cuntz–Algebren*, vergleiche die systematische Darstellung in Kapitel 11 von [BW92] und die neueren Ergebnisse in [Reh96a].

Schnell wurde klar, daß die abstrakte Methode, der Kategorie der Darstellungen eines lokalen Netzes über eine Form von *Dualität* eine *Symmetrie–Algebra* zuzuordnen, weitreichende Verallgemeinerungen vom Spezialfall der Permutationsgruppenstatistik und einer kompakten Eichgruppe zuläßt. So wurden von Majid, Rehren, Schomerus, Häring und anderen *Quantengruppen* als Symmetriealgebren von Darstellungskategorien mit Zopfgruppenstatistik (sogenannten *gezopfte Tensorkategorien*) gefunden.

Für einen Blick in die Originalliteratur sind [Lon94], [Sch95], [Här95] und [Reh96b] zu empfehlen. Sowohl als Einführung in das Thema Quanten–Symmetrien, wie auch als Grundlage eigener Forschung sind die Bücher [Maj95] und [FK93] kaum entbehrlich. Ersteres bietet eine gründliche Behandlung des Themas Quantengruppen, letzteres eine detaillierte Untersuchung der Quanten–Symmetrie von niedrigdimensionaler AQFT mit Zopfgruppenstatistik.

§B.2 Modulare Strukturen, Raum–Zeit–Symmetrie, CPT, Spin und Statistik

Die von H.–J. Borchers eingeführte Idee der Benutzung *modularer Strukturen* von von Neumann Algebren zur Beschreibung von Raum–Zeit–Symmetrien hat sich seit dem Erscheinen von [Bor92] zu einem äußerst furchtbaren Gebiet entwickelt. Die kurze Beschreibung in §32 hätte von daher eine Ausarbeitung zu einem eigenen Kapitel (wenn nicht gar Buch) verdient. Stattdessen kann an dieser Stelle nur ein kurzer Überblick über die aktuelle Literatur gegeben werden. Diese läßt sich — thematisch und geographisch — grob in drei Stränge einteilen:

Borchers selbst hat sein Werk weiter ausgebaut und dazu auch einen umfassenden Überblicksartikel geschrieben ([Bor95a], siehe auch sein Buch [Bor96b]). Ihm gelang schließlich die Rekonstruktion von Poincaré–Kovarianz im Minkowskiraum aus der modularen Struktur von Keil–Algebren in [Bor96a] (wie dies vorher schon Brunetti, Guido und Longo geschafft hatten, s.u.). Sein Interesse gilt aber seit langem den Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Typen von Dualität in der AQFT (Haag–, *Keil–Dualität*) und Raum–Zeit–Symmetrien. Insbesondere auch in diesem Zusammenhang sind modulare Strukturen ein nützliches Instrument, wie man in [BY94] und [Bor95b] nachvollziehen kann.

Die zweite große „Schule“, die zum Thema algebraische Kovarianz beigetragen hat, ist die römische um D. Guido und R. Longo. Die Arbeiten [BGL95], [Gui95] und [GL95] zeigen dies für die Poincaré–Kovarianz im vier– wie im niedrigdimensionalen Fall. Konforme Symmetrie wird in [BGL93] und [GL96] behandelt. In beiden Fällen werden CPT– und Spin–Statistik–Theoreme gezeigt (vergleiche dazu auch [Kuc95]).

Unter anderem in Zusammenarbeit mit der römischen Gruppe hat H.–W. Wiesbrock seine Untersuchungen unter anderem zu lokalisierten Connes' Kozykeln fortgesetzt. Siehe dazu [Wie95] und [GLW97].

§B.3 Konforme Netze und punktartig lokalisierte Felder

Martin Jörß' Arbeiten, die sich mit dem Problem der Konstruktion von Quantenfeldern im Sinne der Wightman–Axiomatik (siehe [SW64] und [Haa92] für die Einführung), also operatorwertigen Distributionen, aus lokalen Observablennetzen im konformen Fall beschäftigen wurden schon in Kapitel IV am Rande erwähnt ([Jör91], [Jör92]). Seitdem wurden auf diesem Feld wesentliche Fortschritte erzielt und in [FJ96], [Jör95] und [Jör96] veröffentlicht.

In [FJ96] wird zu einem „*chiralen*“ lokalen Netz im zweidimensionalen Minkowskiraum, das zusätzlich Möbius–Kovarianz zeigt (also im Prinzip eine konforme Theorie auf dem nichtkompaktifizierten konformen Lichtkegel) der Vakuumsektor im Sinne der Wightman–Axiomatik konstruiert. Das heißt, es werden *punktartig lokalisierte Felder* in der Vakuumdarstellung des Netzes konstruiert, aus denen sich umgekehrt wieder das lokale Netz erzeugen läßt, in dem Sinne, daß sich lokale Observablen in verschmierte Punktfelder entwickeln lassen (*Operatorproduktentwicklung* im Vakuumsektor).

Die Idee zur Erzeugung punktartig lokalisierter Felder ist, eine Art Skalenlimes zu betrachten — vgl. hierzu den nächsten Abschnitt. Das ist wegen der Dilatationskovarianz der konformen Theorie in diesem Fall besonders einfach (um nicht zu sagen *möglich*). Interessanterweise kann man die Konstruktion auf zwei Arten durchführen: Der kanonische (weil im Rahmen der AQFT allgemeinere) Weg führt über die modularen Strukturen des lokalen Netzes, die die SL(2, $\mathbb{R}$)–Kovarianz des Netzes implementieren, wie in §32 beschrieben (vgl. auch den vorangegangenen Abschnitt). Der andere Weg ersetzt die modularen Methoden durch ein *konformes Cluster–Theorem*, um Abgeschlossenheit der Feldoperatoren zeigen zu können.

In [Jör95] werden sodann auch geladene Sektoren — d.h. solche mit beliebiger endlicher Statistik — konstruiert. Die unbeschränkten „*Vertex–Operatoren*“, die zwischen diesen intertwinen, werden dabei als Grenzwerte von Elementen des reduzierten Feldbündels dargestellt (vgl. §31). In [Jör96] wird der zweite mögliche Standpunkt der Wightman–Theorie, nämlich der Formulierung in n–Punkt–Funktionen eingenommen. Es wird eine Erweiterung des konformen Cluster–Theorems bewiesen, mit der es dann möglich ist, aus dem lokalen Netz alle n–Punkt–Funktionen zu gewinnen und das Erfülltsein aller Wightman–Axiome zu zeigen. Es ist allerdings bisher noch nicht bekannt — wenn auch wahrscheinlich – daß diese n–Punkt–Funktionen mit denen, die zu den zuvor in [Jör95] konstruierten Feldern gehören, übereinstimmen.

§B.4 Skalenalgebren

Eine weitere, besonders interessante neue Idee stellen die von Detlev Buchholz eingeführten **Skalenalgebren** dar. Ein langwährendes Problem der algebraischen Quantenfeldtheorie ist ja die Frage ihrer Anwendbarkeit auf konkrete, physikalische Modelle und ihre Aussagekraft auf diesem Terrain. D. Buchholz hat sich seit langem mit diesem Problem beschäftigt und stets versucht aus den fundamentalen Strukturen der algebraischen Quantenfeldtheorie Eigenschaften des Teilchenspektrums der Theorie zu erschließen. Einen konzeptionellen Überblick und weiterführende Referenzen bietet [Buc94].

Leitgedanke der Skalenalgebren–Idee ist folgender: Die Phänomenologie *wechselwirkender* Quantenfeldtheorien (d.h. quantisierten lokalen Eichtheorien) wird bestimmt vom Verhalten der Quantenfelder bei sehr kleinen Abständen. Auf diesen kleinsten Skalen treten dann Phänomene wie *charge–confinement*, *asymptotische Freiheit*, etc. auf. Zwar ist die algebraische Quantenfeldtheorie noch weit davon entfernt eine *lokale* Eichtheorie beschreiben zu können. Aber es ist sehr wohl möglich, in ihrem Rahmen eine konsistente Darstellung des Konzepts der *Renormierungsgruppe* einzuführen. Diese beschreibt üblicherweise in der Quantenfeldtheorie die Wirkung von **Skalentransformationen** $x \mapsto \lambda \cdot x$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ auf die Felder und ihre n–Punkt Funktionen. Ursprünglich tauchten Skalentransformationen in der algebraischen Quantenfeldtheorie zuerst bei der Beschreibung von Quantenfeldtheorien auf einer gekrümmten Raumzeit auf, siehe [FH87].

„Algebraische“ Skalentransformationen müssen im wesentlichen zwei physikalische Bedingungen erfüllen: Zum einen müssen sie *geometrisch* wirken, d.h. sie sollten eine Transformation des lokalen Netzes $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ definieren:

$$R_\lambda \,:\, \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \longmapsto \mathfrak{A}_\lambda(\mathcal{O}) \equiv \mathfrak{A}(\lambda\mathcal{O})\,. \tag{B.1}$$

Zum anderen muß ihre physikalische Wirkung dadurch charakterisiert werden, daß die Transformationen R_λ, die das Netz $\mathfrak{A}$ in das skalierte Netz $\mathfrak{A}_\lambda$ überführen, die physikalischen Konstanten, insbesondere $\hbar$ fest lassen! Transformiert man die Längenskala mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$, so muß man dementsprechend die *Energie–Impuls–Skala* mit λ^{-1} transformieren, um die Einheit der Wirkung konstant zu halten. Algebraisch formuliert man dies im Impulsraum: Sind $\tilde{\mathfrak{A}}(\tilde{\mathcal{O}})$ die (nicht mehr streng lokalisierbaren) Observablen, die auf der ursprünglichen Skala $\lambda = 1$ Energie–Impuls in der Menge $\tilde{O} \subset \mathbb{R}^4$ transferieren, so soll R_λ auf $\tilde{\mathfrak{A}}(\tilde{\mathcal{O}})$ eine Transformation

$$R_\lambda \,:\, \tilde{\mathfrak{A}}(\tilde{\mathcal{O}}) \longmapsto \tilde{\mathfrak{A}}_\lambda(\tilde{\mathcal{O}}) \equiv \tilde{\mathfrak{A}}(\lambda^{-1}\tilde{\mathcal{O}}) \,, \tag{B.2}$$

induzieren.

Physikalisch ist es nun unerheblich, welche der vielen möglichen Renormierungstransformationen auf einem gegebenen Netz $\mathfrak{A}$ man wählt, also betrachtet man alle gemeinsam und definiert **lokale Skalenalgebren**

$$\underline{\mathfrak{A}}(\mathcal{O}) \equiv \{\underline{A} \,:\, \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathfrak{A} | \,\underline{A}_\lambda \in \mathfrak{A}(\lambda\mathcal{O}) \,,\; \lambda \in \mathbb{R}^+\} \,,$$

deren Elemente Funktionen von λ mit Werten im ursprünglichen Netz $\mathfrak{A}$ sind, die den Bedingungen (B.1) und (B.2) genügen. Unter geeigneten Stetigkeitsbedingungen an R_λ ist $\underline{\mathfrak{A}}$ wieder ein lokales, Poincaré–kovariantes Netz, das zusätzlich Dilatationssymmetrie zeigt: $(\underline{\delta}_\mu(\underline{A}))_\lambda \equiv \underline{\mathfrak{A}}_{\mu\lambda}$ definiert einen Netzautomorphismus.

Ausgearbeitet sind diese Ideen in [BV95], [Buc96a]; die notwendigen Phasenraum–Techniken findet man unter anderem in [BD95]. Buchholz und Verch konnten die Existenz von *Skalenlimites* $\lambda \searrow 0$ zeigen und gaben eine erste Klassifizierung (für den Fall, daß der Skalenlimes eindeutig ist):

1. **Klassischer Skalenlimes**: Für $\lambda \to 0$ werden die Algebren abelsch.

2. **Skaleninvariante Theorien**: Die Theorie ist ein Fixpunkt der Skalentransformationen und

3. Theorien mit eindeutigem **Quanten-Skalenlimes**.

Die dritte Klasse ist die physikalisch interessante, denn ihr entsprechen in der Sprache der Renormierungsgruppe Theorien mit einem *ultraviolett-Fixpunkt*, insbesondere die asymptotisch freien Theorien.

Dies alles ist keineswegs nur theoretische Spielerei. In [Buc96b] wird gezeigt, wie sich die Idee der Skalenlimites im Zusammenspiel mit der Methode der Rekonstruktion der Feldalgebra aus den Observablen (siehe [DR90]) nutzen läßt, um die beobachtbaren Eigenschaften eines nichttrivialen, quantenfeldtheoretischen Modells zu erklären, ohne, wie es üblicherweise gemacht wird, Eichfelder einzuführen. Untersucht wird das *Schwinger–Modell*, d.h. Quantenelektrodynamik in $1 + 1$ Dimensionen, und der interessierte Leser sollte es sich nicht entgehen lassen, [Buc96b] mit der „normalen“ feldtheoretischen Behandlung z.B. in [Str93] zu vergleichen.

Symbolverzeichnis

KAPITEL I

$\rho\|_E\,,\ \rho_E$	Morphismus einer Unterdarstellung	nach Satz 5.8	18
$\rho_1 \oplus \rho_2$	direkte Summe von Morphismen	nach Satz 5.8	18
$\mathcal{I}$	unitäre Adjunktionen $\sigma_U \in \Delta$	Def.5.10	19

KAPITEL II

$\boldsymbol{T}$	Intertwiner	Def.6.1	24
$\boldsymbol{I}$	identischer Intertwiner	Def.6.1	24
$(\rho_2\|\rho_1)$	Intertwinerraum	Def.6.2	24
$\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S}$	Verknüpfung von Intertwinern	Def.6.5	25
$\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1$	Produkt von Intertwinern	Def.6.8	26
ε_ρ	statistischer Operator des Sektors ρ	Satz 7.1	29
$\mathbb{P}^{(n)}$	Permutationsgruppe von n Elementen	Def.7.6	32
$\boldsymbol{\varepsilon}_p(\rho_1,\ \ldots,\rho_n)$	Permutationsintertwiner zu $p \in \mathbb{P}^{(n)}$	Thm.7.7	33
$\boldsymbol{\varepsilon}_\rho^{(n)}(p)$	Permutationsintertwiner für ρ^n	(7.11)	34
ϕ bzw. ϕ_ρ	Linksinverse von ρ	Def.8.1	35
λ_ρ	statistischer Parameter des Sektors ρ	Satz 9.1	39
$C^*(\mathbb{P}^{(n)})$	Gruppenalgebra der $\mathbb{P}^{(n)}$	Def.9.3	39
$\omega_n^{\lambda_\rho}$	Spurzustand auf $C^*(\mathbb{P}^{(n)})$	Def.9.3	39
s_n	symmetrischer Projektor in $C^*(\mathbb{P}^{(n)})$	nach Def.9.3	39
a_n	antisymmetrischer Projektor in $C^*(\mathbb{P}^{(n)})$	nach Def.9.3	39
d_ρ	statistische Dimension des Sektors ρ	nach Satz 9.4	41
ρ_L	um $L \in \mathcal{P}$ verschobener Morphismus	(10.1)	43
X_L	Ladungstransporter von ρ nach ρ_L	Lemma 10.2	44
$\mathfrak{U}$	unitäre Gruppe in $\mathfrak{A}$	nach 10.3	45
∂	Korand-Abbildung	nach 10.3	45
$C^n(\mathcal{P},\mathfrak{U})$	Kohomologie-Komplex	nach 10.3	45
Δ_{fin}	kovariante, finite Morphismen	Def.11.1	49
Δ_0	$\Delta_{\text{fin}} \cap \Delta_{\text{irr}}$	Satz 11.24	58
$\boldsymbol{\mathcal{H}}\,,\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_\rho$	Zustandsbündel, Faser	Def.12.1	59
$\boldsymbol{\Psi}$	Element von $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\boldsymbol{\Psi} = \{\rho, \Psi\}$	Def.12.1	59
$\boldsymbol{\mathcal{B}}\,,\ \boldsymbol{\mathcal{B}}_\rho$	Feldbündel, Faser	Def.12.2	59
B	Element von $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\mathsf{B} = \{\rho, B\}$	Def.12.2	59
$\mathsf{B}.\boldsymbol{\Psi}$	Anwendung von B auf $\boldsymbol{Psi}$	Def.12.2	59
$(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Phi})$	Skalarprodukt in $\boldsymbol{\mathcal{H}}$	Def.12.3	59
$\|\|\mathsf{B}\|\|$	Norm in $\boldsymbol{\mathcal{B}}$	Def.12.3	59
$\boldsymbol{T}.\boldsymbol{\Psi}$	Anwendung eines Intertwiners auf $\boldsymbol{\Psi} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}$	Def.12.6	60
$\boldsymbol{T} \circ \mathsf{B}$	Anwendung eines Intertwiners auf $\mathsf{B} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$	Def.12.6	60
$U(L).\boldsymbol{\Psi}$	Wirkung der Kovarianz auf $\boldsymbol{\mathcal{H}}$	(12.7)	60
$\alpha_L.\mathsf{B}$	Wirkung von Kovarianzautomorphismen auf $\boldsymbol{\mathcal{B}}$	(12.8)	60
$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathcal{O})$	lokales Feldbündel	Def.12.12	62
$S(\rho)$	Energiespektrum von ρ	Def.13.1	64
$\overline{\rho}$	zu ρ konjugierter Morphismus	Def.14.1	65
R bzw. R_ρ	Isometrie aus $(\overline{\rho}\rho\|\iota)$	Def.14.1	65
$\overline{R}$ bzw. $R_{\overline{\rho}}$	Isometrie aus $(\rho\overline{\rho}\|\iota)$	Satz 14.4	66
Δ_{S}	Morphismen, die konjugierte besitzen	Bem.14.8	68
$\mathsf{B}^\dagger$	Konjugation in $\boldsymbol{\mathcal{B}}$	Def.15.1	68

KAPITEL III

$\mathcal{O}_1 > \mathcal{O}_2$	$\mathcal{O}_1$ liegt raumartig rechts von $\mathcal{O}_2$	vor Def.16.1	72
$\rho_1 > \rho_2$	ρ_1 ist raumartig rechts von ρ_2 lokalisiert	vor Def.16.1	72
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm}$, $\varepsilon^{\pm}$	positiver/negativer Zopfintertwiner, -operator	Def.16.1	72
B_n	Zopfgruppe von n Strängen	Def.16.4	73
$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$	Generatoren von B_n	Def.16.4	73
$\varepsilon_{\sigma_i}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$	Darstellung des gefärbten Gruppoids von B_n	(16.11)	75
ε_ρ	Kurzschreibweise für $\varepsilon^+(\rho, \rho)$	Def.16.7	76
$\varepsilon_\rho^{(n)}(\sigma_i)$	Darstellung der Zopfgruppe B_n	Def.16.7	76
ω_ρ	statistische Phase des Sektors ρ	Def.16.8	76
B_∞	Kurzschreibweise für $\bigcup_n B_n$	vor Thm.17.1	80
$\mathrm{C}^*(B_\infty)$	Gruppenalgebra der B_∞	Thm.17.1	80
Tr	Markov-Spur auf B_∞	Thm.17.1	80
$\bigtriangledown$	Repräsentantenmenge zu Δ; ebenso $\bigtriangledown_{\mathrm{fin}}$, $\bigtriangledown_{\mathrm{irr}}$, $\bigtriangledown_0$ und $\bigtriangledown_{\mathrm{S}}$	Def.18.1	82
ρ_{I} bzw. I	Repräsentantenmorphismus aus $\bigtriangledown_0$	Def.18.1	82
$\rho_{\bar{\mathrm{I}}}$	Konjugierter Repräsentant $\overline{\rho}_{\mathrm{I}}$	Def.18.1	82
$N_{\mathrm{IJ}}^{\mathrm{K}}$	Matrixelement der Inzidenzmatrix N_{I} der Zerlegung des Produkts $[\rho_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{J}}]$	Def.18.2	82
$e \equiv ({}_{\mathrm{I}}{}^{\mathrm{K}}{}_{\mathrm{J}})$	superselection-Kanal $({}_{s(e)}{}^{r(e)}{}_{c(e)})$	Def.18.4	83
$s(e)$, $c(e)$, $r(e)$	Quelle, Ladung, Ziel von e	Def.18.4	83
T_e^α	Orthonormalbasis eines Fusionsraums	Def.18.4	83
$e_1 \circ e_2$	Verknüpfung von Kanälen	Def.18.6	84
$\mathrm{Pfad}^{(n)}_{s(e_1)r(e_n)}$	Fusionsfad der Länge n	Def.18.6	84
$\mathrm{Strang}^{(n)}_{\mathrm{I}}$	Strang mit Aufhängungspunkt I	Def.18.14	85
$B^{(\pm)}_{\xi'\xi}(b)$	Zopfmatrixelement	Def.19.1	89
$F_{e_1\circ e_2;f;e}$	Fusionsmatrixelement zum Kanal f	Def.19.8	90
$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}}$	reduziertes Zustandsbündel	Def.21.1	93
$\boldsymbol{\Psi} = (\rho_{\mathrm{I}}, \Psi)$	Element von $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}}$	Def.21.1	93
$(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi})$	Skalarprodukt in $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{red}}$	Def.21.1	93
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	reduziertes Feldbündel	Def.21.2	94
$\mathsf{e} = (e, A)$	Element von $\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Def.21.2	94
$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{O})$	lokales reduziertes Feldbündel	Def.21.5	95
$\alpha_L \mathsf{e}$	Wirkung von Kovarianzautomorphismen auf $\boldsymbol{\mathcal{F}}$	(21.15)	96
e^*, $\widehat{e}$, $\overline{e}$	Operationen auf Kanälen	Def.22.1	97
χ_ρ, η_{ee^*}, $\theta^e_{\widehat{e}}$, $\zeta_{e\overline{e}}$	Strukturkonstanten	Def.22.2	97
e^*	Adjunktion in $\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Def.23.1	103
$\widehat{\mathsf{e}}$	Operatorumkehr in $\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Def.23.3	104
$\overline{\mathsf{e}}$	Ladungskonjugation in $\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Def.23.4	104

KAPITEL IV

$W(\gamma)$	unitäre Kovarianzdarstellung der Möbiusgruppe auf $\mathfrak{H}_0$; analog wie in Kap.I–III: W_π, W_ρ	Def.24.2	112
T_0	konformer Hamiltonian	Def.24.2	112

$\mathcal{I}, \mathcal{J}, \ldots$	eigentliche Intervalle der S^1	Def.24.3	112
$\pi^{\mathcal{I}}$	Element einer konformen Darstellungsfamilie	Def.24.4	113
$\mathrm{M},\ \widetilde{\mathrm{M}}$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ und ihre universelle Überlagerung	nach Def.24.4	113
$\mathcal{I}_{\pm}$	oberer/unterer Halbkreis	vor Thm.25.6	117
Θ	CPT-Operator	vor Thm.25.6	117
$\varepsilon^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$	Inklusion der Prä-Kogarbe $\mathfrak{B}$	Def.26.2	118
$\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$	universelle Algebra auf der S^1	Thm.26.4	119
$\mathfrak{A}_{\xi}$	Algebra der bei ξ dekompaktifizierten S^1	(28.1)	125
V_{ρ}	globaler Intertwiner in $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$	(28.2)	126
$W_{\rho}\,,\ C_{\rho}$	zentrale Elemente in $\mathfrak{A}_{\mathrm{univ}}$	Satz 28.2	126
h_{ρ}	konforme Skalierungsdimension des Sektors ρ	(29.1)	129
S_{IJ}	statistische Charakterentafel einer ACQFT	Def.30.1	132
$\Sigma,\ \sigma$	Konstanten in der Definition von S	Def.30.1	132
$\vec{Y}_{\mathrm{J}}$	Gewichtsvektor	vor Lemma 30.3	133
$\vec{\chi}_{\mathrm{I}}$	statistischer Charakter	vor Lemma 30.3	133
C	Ladungskonjugationsmatrix	Thm.30.5	135
$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{univ}}\,,\ \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{univ},\xi}$	universelles Feldbündel über S^1, bzw. $S^1 \setminus \{\xi\}$	Anfang von §31	136
$\{\rho, A\}$	Feldbündelelement einer ACQFT über S^1	Def.31.3	137
$W_R\,,\ W_L$	rechter, linker Keil in $\mathbb{R}^2$	vor (32.8)	141
$D_{a,b}$	zweidimensionaler Doppelkegel	(32.8)	141

Stichwortverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Adl96] C. Adler. Braid Group Statistics in Two–dimensional Quantum Field Theory. *Reviews in Mathematical Physics*, 8(7):907—924, 1996.

[Ami78] D.J. Amit. *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena.* McGraw-Hill, 1978.

[Arv76] William Arveson. *An Invitation to C*-Algebras.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[BD95] Detlev Buchholz und C. D'Antoni. Phase Space Properties of Charged Fields in Theories of Local Observables. *Reviews in Mathematical Physics*, 7(4):527—557, 1995.

[BDF87] Detlev Buchholz, C. D'Antoni, und Klaus Fredenhagen. The Universal Structure of Local Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, 111:123—135, 1987.

[BF82] Detlev Buchholz und Klaus Fredenhagen. Locality and the Structure of Particle States. *Communications in Mathematical Physics*, 84:1–54, 1982.

[BF97] R. Brunetti und Klaus Fredenhagen. Interacting Quantum Fields in Curved Space: Renormalizability of φ^4. To be published on the proceedings of the conference "Operator Algebras and Quantum Field Theory" held at Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, Italy, July 1996, 1997. XXX–preprint–server: `gr-qc/9701048`.

[BFK96] R. Brunetti, Klaus Fredenhagen, und M. Köhler. The Microlocal Spectrum Condition and Wick Polynomials of Free Fields on Curved Spacetime. *Communications in Mathematical Physics*, 180:633—652, 1996.

[BGL93] R. Brunetti, Daniele Guido, und Roberto Longo. Modular Structure and Duality in Conformal Quantum Field Theory. *Communications in Mathematical Physics*, 156:201—219, 1993.

[BGL95] R. Brunetti, Daniele Guido, und Roberto Longo. Group Cohomology, Modular Theory and Space–Time Symmetries. *Reviews in Mathematical Physics*, 7(1):57—71, 1995.

[Bir74] Joan S. Birman. *Braids, Links and Mapping Class Groups.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[BJY92] H. J. Borchers und Jakob Yngvason. From Quantum Fields to Local von Neumann Algebras. In *Reviews in Mathematical Physics*, pages 113—157, Dezember 1992.

[BMT88] Detlev Buchholz, G. Mack, und I. T. Todorov. The Current Algebra on the Circle as a Germ of Local Field Theories. *Nuclear Physics B, (Proceedings Supplement)*, 5:20—56, 1988.

[BMT89] D. Buchholz, G. Mack, und I. Todorov. Localized Automorphisms of the U(1)-current. In Kastler [Kas89], pages 356—378.

[Bog90] N. N. Bogolubov. *General Principles of Quantum Field Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1990.

[Bor65a] H. J. Borchers. Local Rings and the Connection of Spin with Statistics. *Communications in Mathematical Physics*, 1:291, 1965.

[Bor65b] H. J. Borchers. On the Vacuum State in Quantum Field Theory II. *Communications in Mathematical Physics*, 1:57, 1965.

[Bor66] H. J. Borchers. Energy and Momentum as Observables in Quantum Field Theory. *Communications in Mathematical Physics*, 2:49, 1966.

[Bor68] H. J. Borchers. On the Converse of the Reeh-Schlieder-Theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 10:269—273, 1968.

[Bor92] H. J. Borchers. The CPT-Theorem in Two-dimensional Theories of Local Observables. *Communications in Mathematical Physics*, 143:315—332, 1992.

[Bor95a] H. J. Borchers. On the use of Modular Groups in Quantum Field Theory. *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor.*, 63(4):331—382, 1995.

[Bor95b] H. J. Borchers. When Does Lorentz Invariance Imply Wedge Duality? *Letters in Mathematical Physics*, 35(1):39—60, 1995.

[Bor96a] H. J. Borchers. Half–sided Modular Inclusion and the Construction of the Poincaré Group. *Communications in Mathematical Physics*, 179:703—723, 1996.

[Bor96b] H. J. Borchers. *Translation Group and Particle Representations in Quantum Field Theory*, Band 40 der Reihe *Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

[BR79] Ola Bratteli und Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[Bro63] Felix E. Browder. On the „Edge of the Wedge“ Theorem. *Canadian Journal of Mathematics*, 15:125—131, 1963.

[BSM90] Detlev Buchholz und Hanns Schulz-Mirbach. Haag Duality in Conformal Quantum Field Theory. *Reviews in Mathematical Physics*, 2(1):105–125, 1990.

[Buc94] Detlev Buchholz. On the Manifestation of Particles. In R. N. Sen und A. Gersten, Herausgeber, *Mathematical Physics Towards the 21st Century*, Beer–Sheva, 1994. Ben Gurion University Press. DESY–Preprint 93–155. XXX–preprint–server: `q-alg/9611007`.

[Buc96a] Detlev Buchholz. Phase Space Properties of Local Observbles and Structure of Scaling Limits. *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor.*, 64:433—460, 1996.

[Buc96b] Detlev Buchholz. Quarks, Gluons, Colour: Facts or Fiction? *Nuclear Physics B*, 469:333—356, 1996.

[BV95] Detlev Buchholz und Rainer Verch. Scaling Algebras and Renormalization Group in Algebraic Quantum Field Theory. *Reviews in Mathematical Physics*, 7:1195—1240, 1995.

[BW75] Joseph J. Bisognano und Eyvind H. Wichmann. On the Duality Condition for a Hermitian Scalar Field. *Journal of Mathematical Physics*, 16 No. 4:985—1007, 1975.

[BW76] Joseph J. Bisognano und Eyvind H. Wichmann. On the Duality Condition for Quantum Fields. *Journal of Mathematical Physics*, 17 No. 3:303—321, 1976.

[BW86] Detlev Buchholz und Eyvind H. Wichmann. Causal Independence and the Energy-Level Density of States in Local Quantum Field Theory. *Communications in Mathematical Physics*, 106:321—344, 1986.

[BW92] Hellmut Baumgärtel und Manfred Wollenberg. *Causal Nets of Operator Algebras*. Akademie Verlag, Berlin, 1992.

[BY94] H. J. Borchers und Jakob Yngvason. Transitivity of Locality and Duality in Quantum Field Theory. Some Modular Aspects. *Reviews in Mathematical Physics*, 6(4):597—619, 1994.

[DHR69a] Sergio Doplicher, Rudolf Haag, und John E. Roberts. Fields, Observables and Gauge Transformations I. *Communications in Mathematical Physics*, 13:1–23, 1969.

[DHR69b] Sergio Doplicher, Rudolf Haag, und John E. Roberts. Fields, Observables and Gauge Transformations II. *Communications in Mathematical Physics*, 15:173–200, 1969.

[DHR71] Sergio Doplicher, Rudolf Haag, und John E. Roberts. Local Observables and Particle Statistics I. *Communications in Mathematical Physics*, 23:199–230, 1971.

[DHR74] Sergio Doplicher, Rudolf Haag, und John E. Roberts. Local Observables and Particle Statistics II. *Communications in Mathematical Physics*, 35:49–85, 1974.

[Dop65] Sergio Doplicher. An Algebraic Spectrum Condition. *Communications in Mathematical Physics*, 1:1–5, 1965.

[DR89a] Sergio Doplicher und John E. Roberts. A new Duality Theory for Compact Groups. *Invetiones mathematicae*, 98:157—218, 1989.

[DR89b] Sergio Doplicher und John E. Roberts. Endomorphisms of C*-Algebras, cross Products and Duality for Compact Groups. *Annals of Mathematics*, 130:75–119, 1989.

[DR90] Sergio Doplicher und John E. Roberts. Why There is a Field Algebra with a Compact Gauge Group Describing the Superselection Structure in Particle Physics. *Communications in Mathematical Physics*, 131:51–107, 1990.

[DSW86] Wulf Driessler, Stephen J. Summers, und Eyvind H. Wichmann. On the Connection Between Quantum Fields and von Neumann Algebras of Local Operators. *Communications in Mathematical Physics*, 105:49—84, 1986.

[FFK89] G. Felder, J. Fröhlich, und G. Keller. On the Structure of Unitary Conformal Field Theory. I. Existence of Conformal Blocks. *Communications in Mathematical Physics*, 124:417–463, 1989.

[FFK90] G. Felder, J. Fröhlich, und G. Keller. On the Structure of Unitary Conformal Field Theory. II. Representation Theoretic Approach. *Communications in Mathematical Physics*, 130:1–49, 1990.

[FG90] J. Fröhlich und F. Gabbiani. Braid Statistics in Local Quantum Theory. *Reviews in Mathematical Physics*, 2(3):251–353, 1990.

[FGV92] Jürgen Fuchs, Alexander Ganchev, und Peter Vecsernyés. Level 1 WZW Superselection Sectors. *Communications in Mathematical Physics*, 146:553–583, 1992.

[FH87] Klaus Fredenhagen und Rudolf Haag. Generally Covariant Quantum Field Theory and Scaling Limits. *Communications in Mathematical Physics*, 108:91—115, 1987.

[FJ96] Klaus Fredenhagen und Martin Jörß. Conformal Haag–Kastler Nets, Pointlike Localized Fields and the Existence of Operator Product Expansions. *Communications in Mathematical Physics*, 176:541—554, 1996.

[FK93] Jürg Fröhlich und Thomas Kerler. *Quantum Groups, Quantum Categories and Quantum Field Theory*, Band 1542 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[Fre85] Klaus Fredenhagen. On the Modular Structure of Local Algebras of Observables. *Communications in Mathematical Physics*, 97:79—89, 1985.

[Fre89] Klaus Fredenhagen. Generalization of the Theory of Superselection Sectors. In Kastler [Kas89], pages 379—387.

[Frö88] J. Fröhlich. Statistics of Fields, the Yang-Baxter Equation, and the Theory of Links and Knots. In *Nonperturbative Quantum Field Theory*, pages 71–99. Plenum Press, 1988.

[FRS89] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, und B. Schroer. Superselection Sectors with Braid Group Statistics and Exhcange Algebras. I. General Theory. *Communications in Mathematical Physics*, 125:201–226, 1989.

[FRS92] Klaus Fredenhagen, Karl-Henning Rehren, und Bert Schroer. Superselection Sectors with Braid Group Statistics and Exchange Algebras. II. Geometric Aspects and Conformal Covariance. *Reviews in Mathematical Physics*, pages 113—157, Dezember 1992.

[FST89] P. Furlan, G.M. Sotkov, und I.T. Todorov. Two Dimensional Conformal Quantum Field Theory. *Riv. Nouvo Cimento*, 12(6):1—202, 1989.

[GL92] Daniele Guido und Roberto Longo. Relativistic Invariance and Charge Conjugation in Quantum Field Theory. *Communications in Mathematical Physics*, 148:521—551, 1992.

[GL95] Daniele Guido und Roberto Longo. An Algebraic Spin and Statistics Theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 172(3):517—533, 1995.

[GL96] Daniele Guido und Roberto Longo. The Conformal Spin and Statistics Theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 181:11, 1996.

[GLW97] Daniele Guido, Roberto Longo, und Hans-Werner Wiesbrock. Extensions of Conformal Nets and Superselection Structures. XXX–preprint–server: `hep-th/9703129`, 1997.

[Gui95] Daniele Guido. Modular Covariance, PCT, Spin and Statistics. *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor.*, 63(4):383—398, 1995.

[Haa92] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[Här93] Reinhard Häring. Quanten-symmetrie. Diplomarbeit, Frankfurt am Main, 1993.

[Här95] Reinhard Häring. Reconstruction of Weak Quasi Hopf Algebras. Mathematica Gottingensis, Schriftenreihe des Sonderforschungsbereichs Geometrie und Analysis, Heft 14, 1995.

[Jör91] Martin Jörß. Lokale Netze auf dem eindimensionalen Lichtkegel. Diplomarbeit, FU Berlin, 1991.

[Jör92] Martin Jörß. On the Existence of Pointlike Localized Fields in Conformally Invariant Quantum Physics. DESY–preprint 92–156, 1992.

[Jör95] Martin Jörß. The Construction of Pointlike Localized Charged Fields from Conformal Haag–Kastler Nets. DESY–preprint 95–105, to appear in Letters in Mathematical Physics, 1995. XXX–preprint–server: `hep-th/9506016`.

[Jör96] Martin Jörß. From Conformal Haag–Kastler Nets to Wightman Functions. XXX–preprint–server: `hep-th/9609020`, 1996. To appear in Letters in Mathematical Physics.

[Kas89] Daniel Kastler, Herausgeber. *The Algebraic Theory of Superselection Sectors. Introduction and Recent Results.* Istituto Scientifico Internationale, World Scientific, 1989.

[Kra93] Henrik Kratz. Axiomatik und Quantensymmetrien rationaler konformer Feldtheorien. Diplomarbeit, Frankfurt am Main, 1993.

[Kuc95] Bernd Kuckert. A New Approach to Spin & Statistics. *Letters in Mathematical Physics*, 35(4):319—331, 1995.

[Li91] Miao Li. Duality and Modular Invariance in Rational Conformal Field Theories. *Communications in Mathematical Physics*, pages 473–517, 1991.

[Lon89a] R. Longo. Index Theory of Subfactors and Braid Group Statistics. In Kastler [Kas89], pages 485—488.

[Lon89b] Roberto Longo. Index of Subfactors and Statistics of Quantum Fields I. *Communications in Mathematical Physics*, 126:217–247, 1989.

[Lon90] Roberto Longo. Index of Subfactors and Statistics of Quantum Fields II. *Communications in Mathematical Physics*, 130:285–309, 1990.

[Lon94] Roberto Longo. A Duality for Hopf Algebras and for Subfactors. I. *Communications in Mathematical Physics*, 159:133—150, 1994.

[LR95] Roberto Longo und Karl-Henning Rehren. Nets of Subfactors. *Reviews in Mathematical Physics*, 7(4):567—597, 1995.

[Maj91] Shahn Majid. Reconstruction Theorems and Rational Conformal Field Theories. *International Journal of Modern Physics A*, 6:4359—4374, 1991.

[Maj95] Shahn Majid. *Foundations of Quantum Groups.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.

[MS89a] G. Mack und V. Schomerus. Endomorphisms an Quantum Symmetry of the Conformal Ising Model. In Kastler [Kas89], pages 388—427.

[MS89b] G. Moore und N. Seiberg. Lectures on RCQFT. preprint, 1989.

[MS89c] Gregory Moore und Nathan Seiberg. Classical and Quantum Conformal Field Theory. *Communications in Mathematical Physics*, 123:177–254, 1989.

[Mur90] Gerard J. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, Inc., Boston, San Diego, New York, 1990.

[Rad96] Marek J. Radzikowski. Micro–Local Approach to the Hadamard Condition in Quantum Field Theory on Curved Space–Time. *Communications in Mathematical Physics*, 179:529—553, 1996.

[Reh89a] Karl-Henning Rehren. Braid Group Statistics and their Superselection Rules. In Kastler [Kas89], pages 333—378.

[Reh89b] Karl-Henning Rehren. Quantum Symmetry Associated with Braid Group Statistics. In H.-D. Doebner und J.-D. Hennig, Herausgeber, *Quantum Groups*, pages 318–339. Proceedings of the 8th International Workshop on Mathematical Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

[Reh90] Karl-Henning Rehren. Space-Time Fields and Exchange Fields. *Communications in Mathematical Physics*, 132:461–483, 1990.

[Reh91] Karl-Henning Rehren. Quantum Symmetry Associated with Braid Group Statistics II. *DESY-preprint*, Nov. 1991.

[Reh92] Karl-Henning Rehren. Field Operators for Anyons and Plektons. *Communications in Mathematical Physics*, 145:123–148, 1992.

[Reh95] Karl-Henning Rehren. On the Range of the Index of Subfactors. *Journal of Functional Analysis*, 134(1):183—193, 1995.

[Reh96a] K.-H. Rehren. Generalized Cuntz Algebras Associated with Subfactors. To be published on the proceedings of the conference "Operator Algebras and Quantum Field Theory" held at Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, Italy, July 1996, 1996. XXX–preprint–server: `funct-an/9611001`.

[Reh96b] K.-H. Rehren. Weak C* Hopf Symmetry. DESY–preprint 96–231, 1996. XXX–preprint–server: `q-alg/9611007`.

[RS89] Karl-Henning Rehren und Bert Schroer. Einstein Causality and Artin Braids. *Nuclear Physics*, B312:715—750, 1989.

[RST96] Karl-Henning Rehren, Yassen S. Stanev, und Ivan T. Todorov. Characterizing Invariants for Local Extensions of Current Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, 174(3):605—633, 1996.

[Sch89] Bert Schroer. Algebraic QFT as a Framework for Classification and Model-Building. In Kastler [Kas89], pages 489—526.

[Sch92] Bert Schroer. Scattering Properties of Anyons and Plektons. *Nuclear Physics*, B369:478–498, 1992.

[Sch95] Volker Schomerus. Construction of Field Algebras with Quantum Symmetry from Local Observables. *Communications in Mathematical Physics*, 169:193—236, 1995.

[Str93] F. Strocchi. *Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory*, Band 51 der Reihe *Lecture Notes in Physics*. World Scientific, Singapore, London, Hong Kong, 1993.

[SW64] R. F. Streater und Arthur S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and All That.* W. A. Benjamin, London, Amsterdam, 1964.

[TW73] Masamichi Takesaki und Marinus Winnik. Local Normality in Quantum Statistical Mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 30:129—152, 1973.

[vdW67] B. L. van der Waerden. *Algebra I & II.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[Ver88] E. Verlinde. Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory. *Nuclear Physics*, B300:360, 1988.

[Wie93a] Hans-Werner Wiesbrock. Conformal Quantum Field Theory and Half-Sided Modular Inclusions of von-Neumann-Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, 158:537—543, 1993.

[Wie93b] Hans-Werner Wiesbrock. Half-Sided Modular Inclusions of von-Neumann-Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, 157:83—92, 1993.

[Wie94] Hans-Werner Wiesbrock. A Note on Strongly Additive Conformal Field Theory and Half-Sided Modular Conormal Standard Inclusions. *Letters in Mathematical Physics*, 31(4):303—307, 1994.

[Wie95] Hans-Werner Wiesbrock. Superselection Structure and Localized Connes' Cocycles. *Reviews in Mathematical Physics*, 7(1):133—160, 1995.